בס"ד

פתרון המבחן מועד א' בקורס 83114
חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

שאלה 1. הראה כי:

א. הפרש של שתי סדרות פונקציות המתכנסות כל אחת במידה שווה בקטע I מתכנס אף הוא במידה שווה שם.

ב. אם טור פונקציות $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ מתכנס במידה שווה בקטע I, אז גם סדרת הפונקציות $\{f_k(x)\}$ מתכנסת במידה שווה לאפס שם (אפשר להיעזר בתוצאה של סעיף א').

פתרון:

א. תהיינה שתי סדרות המתכנסות במ"ש בקטע I: $a_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}a(x), b_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}b(x)$

כלומר לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ (הגדול מבין השניים שמתקבלים בסדרות) כך ש:

$$\forall n>n_0, x\in I:\ \left|a_n(x)-a(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\ ,\ \left|b_n(x)-b(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

לפיכך:

$$\forall n>n_0, x\in I:\ \left|a_n(x)-b_n(x)-\left(a(x)-b(x)\right)\right|=\left|a_n(x)-a(x)-\left(b_n(x)-b(x)\right)\right|$$
$$\le\left|a_n(x)-a(x)\right|+\left|b_n(x)-b(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

כלומר הפרש הסדרות $a_n(x)-b_n(x)$ מתכנס במ"ש ב- I לפונקצית הגבול: $a(x)-b(x)$.

ב. טור פונקציות מתכנס במ"ש בקטע אם הסס"ח שלו $S_n(x)$ מתכנסת במ"ש שם לסכום: $S(x)$.

נרשום: $f_n(x)=S_n(x)-S_{n-1}(x)\xrightarrow{n\to\infty}S(x)-S(x)=0$ ונקבל על סמך סעיף א' שההתכנסות היא במ"ש לאפס בקטע.

שאלה 2.

א. תהא הפונקציה: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+x^2}$. הראה כי האינטגרל $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ מתכנס.

ב. קבע היכן טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ מתכנס במידה שווה.

פתרון:

א. לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים: $\frac{1}{n^4+x^2}\le\frac{1}{n^4}$ וטור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ מתכנס. לכן עפ"י משפט ה-M של ויירשטראס טור הפונקציות מתכנס במידה שווה בכל $\mathbb{R}$.

אם כן ניתן בכל קטע להחליף את סדר האינטגרל עם הסכום ולקבל:

$$I=\int_0^\infty\left(\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^4+x^2}\right)dx=\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty\frac{dx}{n^4+x^2}=\sum_{n=1}^\infty\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{dx}{n^4+x^2}\,.$$

נחשב את האינטגרל המסוים: $\int_0^b\frac{dx}{n^4+x^2}=\frac{1}{n^2}\arctan\frac{x}{n^2}\Big|_0^b=\frac{1}{n^2}\arctan\frac{b}{n^2}$

ונקבל בסה"כ טור מתכנס: $I=\sum_{n=1}^\infty\lim_{b\to\infty}\frac{1}{n^2}\arctan\frac{b}{n^2}=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}\left(=\frac{\pi^3}{12}\right)$.

ב. תחילה נחשב את רדיוס ההתכנסות עפ"י משפט דלמבר:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{(2n+2)!}{\left((n+1)!\right)^2}=\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}\xrightarrow{n\to\infty}4=R$$

נבדוק בקצוות ±4: נציב $x=4$ ונקבל את טור המספרים: $\sum_{n=0}^\infty\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$.

עפ"י מבחן דלמבר לטורים נקבל: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{4n^2+8n+4}{4n^2+6n+3}$.

נשים לב כי תמיד מנת העוקבים גדולה מאחד, כלומר a_n היא סדרה חיובית עולה ומכאן

שבהכרח אינה מקיימת תנאי הכרחי להתכנסות: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ והטור מתבדר. כן לגבי $x=-4$.

קיבלנו שהטור מתכנס נקודתית בתחום $(-4,4)$.

כיוון שזהו טור חזקות ההתכנסות במידה שווה תהיה בכל קטע סגור המוכל בתחום הזה.

שאלה 3. מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה: $f(x,y)=\left(1+e^y\right)\cos x-ye^y$.

איזו תופעה מתרחשת כאן שאינה יכולה להתרחש במקרה של פונקציות של משתנה אחד ?

פתרון:

נחפש נקודות קריטיות: $f_x=-\left(1+e^y\right)\sin x=0\ \Rightarrow\ x=\pi n, n\in\mathbb{Z}$

נציב זאת בתנאי השני: $f_y=e^y\cos x-ye^y-e^y=e^y(\cos x-y-1)=e^y\left((-1)^n-y-1\right)=0$

ונקבל: $y=(-1)^n-1, n\in\mathbb{Z}$ כלומר הנקודות הקריטיות הן: $(x,y)=\left(\pi n,(-1)^n-1\right), n\in\mathbb{Z}$.

נחשב את הנגזרות מסדר שני בנקודות הללו:

$$f_{xx}=-\left(1+e^y\right)\cos x\ \Rightarrow\ A_n=f_{xx}\left(\pi n,(-1)^n-1\right)=-\left(1+e^{(-1)^n-1}\right)(-1)^{n+1}=\underbrace{\left(1+e^{(-1)^n-1}\right)}_{>0}(-1)^n$$

$$f_{yx}=-e^{y}\sin x\ \Rightarrow\ B_n=f_{yx}\left(x=\pi n\right)=0$$

$$f_{yy}=e^{y}\left(\cos x-y-2\right)\ \Rightarrow\ C_n=f_{yy}\left(x=\pi n,y=\left(-1\right)^{n}-1\right)=e^{y}\left(-1\right)<0$$

עבור: $n\in 2\mathbb{Z}+1$ נקבל: $A_n<0,C_n<0\ \Rightarrow\ \Delta_n=A_nC_n-B_n^2=A_nC_n>0$ כלומר נקודות מקסימום חזק ואילו עבור: $n\in 2\mathbb{Z}$ נקבל: $A_n>0,C_n<0\ \Rightarrow\ \Delta_n=A_nC_n<0$ כלומר נקודות אוכף.

בפונקציה רציפה במשתנה אחד תופעה של אינסוף נקודות מקסימום חזק ללא שום נקודת מינימום אינה אפשרית שכן אם הפונקציה רציפה בין כל שתי נקודות מקסימום חזק חייבת להיות נקודת מינימום חזק (כמו שבשרשרת הרים ברכס בין כל שתי פסגות יש אוכף.)

שאלה 4. חשב: $\int\limits_{L}\left(e^{x}\sin y-xy\right)dx+\left(e^{x}\cos y-1\right)dy$ באשר L הוא הקשת על המעגל $x^2+y^2=ax$ בין הנקודה $\left(a,0\right)$ לנקודה $\left(0,0\right)$.

פתרון:

נסמן את מרכיבי השדה הווקטורי: $P=e^{x}\sin y-xy\,,\,Q=e^{x}\cos y-1$ ונסגור תחום D ע"י הקטע C שהוא הקטע הישר המחבר בין הראשית חזרה לנקודה $\left(a,0\right)$.

הפרמטריזציה של הקטע C היא: $r\left(t\right)=\left(t,0\right),t:0\mapsto a$ והשדה על הקטע הוא: $\left(0,e^{t}-1\right)$.

אם כן: $\int\limits_{C}A\bullet dr=\int\limits_{0}^{a}\left(0,e^{t}-1\right)\bullet\left(1,0\right)dt=0$ כלומר האינטגרציה לאורך C לא תורמת כלום ואפשר לכתוב

עפ"י משפט גרין: $\iint\limits_{D}xdxdy=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_{L+C=\partial D}A\bullet dr=\int\limits_{C}A\bullet dr+\int\limits_{L}A\bullet dr=\int\limits_{L}A\bullet dr$.

במערכת פולרית התחום D מצוין ע"י: $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\le r\le a\cos\theta$.

במערכת זו נקבל:

$$\iint\limits_{D}xdxdy=\int\limits_{0}^{\pi/2}d\theta\int\limits_{0}^{a\cos\theta}\underset{J}{r}\cdot\underbrace{r\cos\theta}_{x}\,dr=\frac{a^3}{3}\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta=\frac{a^3}{3}\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)^2d\theta$$
$$=\frac{a^3}{12}\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right)d\theta=\frac{a^3}{12}\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\theta\right)d\theta=\frac{a^3\pi}{16}$$

שאלה 5. הגוף V חסום מלמטה ע"י החרוט: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ומלמעלה ע"י מעטפת הכדור $x^2+y^2+z^2=1$. אשר את משפט גאוס על הגוף V בנוכחות שדה ווקטורי: $A=\left(0,0,z\right)$.

פתרון:

אם נשווה בין ערכי z של שני המשטחים נקבל: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{x^2+y^2}$ כלומר הכיפה והחרוט נושקים זה לזה במישור $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$ המקביל למישור XY. המשמעות בקורדינטות כדוריות היא: $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

<u>אגף שמאל</u>: נחשב את השטף דרך שני המשטחים: S_1 = חרוט, S_2 = כיפת מעטפת הכדור.

הנורמל המנורמל של S_1 הוא: $\hat{n}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},-1\right)$ ונקבל שהשטף הוא:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{S_1}(0,0,z)\bullet\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},-1\right)dS_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{S_1}zdS_1 .$$

באמצעות הטלה על מישור (x,y) באשר: $dS_1=\sqrt{2}dD$ ובהצגה פולרית שם נקבל שהשטף הוא:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_D \underset{J}{\underset{\smile}{r}}\cdot\underset{z}{\underset{\smile}{r}}\sqrt{2}dD=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1/\sqrt{2}}r^2dr=-2\pi\cdot\frac{1}{3\cdot2\sqrt{2}}=-\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$$

הנורמל המנורמל של S_2 הוא: $\hat{n}_2=(x,y,z)$ והשטף הוא: $\iint_{S_2}(x,y,z)\bullet(0,0,z)dS_2=\iint_{S_2}z^2dS_2$

ההטלה כאן על מישור (x,y) נותנת: $dS_2=\frac{dD}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\frac{dD}{z}$ ולפיכך נקבל:

$$\iint_{S_2}z^2dS_2=\iint_D zdD=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1/\sqrt{2}}\underset{J}{\underset{\smile}{r}}\cdot\underbrace{\sqrt{1-r^2}}_{z}dr=-\frac{2\pi}{3}\left(1-r^2\right)^{3/2}\Big|_0^{1/\sqrt{2}}=\frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

בסה"כ: $$\oiint_S A\bullet\hat{n}\,dS=\frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)-\frac{\pi}{3\sqrt{2}}=\frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

<u>אגף ימין</u>: כאן: $divA=1$ ולכן מה שמתקבל הוא בסה"כ הנפח של הגוף:

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^2dr=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/4}\sin\varphi d\theta=-\frac{2\pi}{3}\cos\varphi\Big|_0^{\pi/4}=\frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$