תרגיל 8 - לינארית למורים

1 בפברואר 2017

שאלה 1

מצאו את שלושת המרחבים היסודיים של המטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ -2 & -3 & 0 & -3 & -5 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

פתרון:

נדרג את המטריצה ונקבל את המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן לפי מה שלמדנו בכיתה: מרחב השורות הוא מרחב השורות של המטריצה הדורגת

$$B_{R(A)}=\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

עמודות של A המתאימות לעמודות עם איבר מוביל במטריצה המדורגת מהוות בסיס למרחב השורות של A

$$B_{C(A)}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\},$$

מרחב האפס של A הוא מרחב האפס של המטריצה המדורגת. הפתרון של המערכת

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=0$$

, מציב פרמטרים במקום המשתנים החופשיים

$x_2=t,x_4=s,x_5=l$

ומתקיים $x_1=\frac{-3t-3s-5l}{2}$, $x_3=-s$

$$N\left(A\right)=\left\{\begin{pmatrix}\frac{-3t-3s-5l}{2}\\ t\\ -s\\ s\\ l\end{pmatrix}\right\}=\left\{t\begin{pmatrix}\frac{-3}{2}\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}\frac{-3}{2}\\ 0\\ -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}\frac{-5}{2}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן $B_{N(A)}=\left\{\begin{pmatrix}-4\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{-3}{2}\\ 0\\ -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{-5}{2}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$,

שלאה 2

מצאו את שלושת המרחבים היסודיים של המטריצה הבאה:

$$B=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\ 2&1&1&3\\ 1&1&0&2\end{pmatrix}$$

פתרון:

כדי למצוא בסיסים למרחבי השורה, עמודה והאפס שלה מדרג את המטריצה ונקבל את המטריצה הבאה:

$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\ 0&1&-1&1\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}$, מכאן כבר נוכל להסיק כי מימד מרחב השורות/העמודות שווה ל־2 כמספר השורות השונות מאפס בצורה מדורגת

מרחב שורה:

מרחב השורה של מטריצה המקורית נפרש ע"י השורות השונות מאפס בצורה המדורגת: $R\left(A\right)=span\left\{\left(1,0,1,1\right),\left(0,1,-1,1\right)\right\}$.

מרחב עמודה:

רואים כי במטריצה שהתקבלה אחרי הדירוג, איברים פותחים מופיעים בעמודות הראשונה והשנייה ולכן העמודות הראשונה והשנייה במטריצה המקורית מהוות בסיס למרחב העמודה, כלומר:

$$C\left(A\right)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right\}.$$

מרחב האפס:

דירגנו את המטריצה וקיבלנו שהמשתנים השלישי והרביעי חופשיים. נציב במקומם פרמטרים s,t ונקבל אחרי חילוץ האחרים את הפתרון הכללי:

$\left\{\left(-t,-s,t-s,t,s\right)|t,s\in\mathbb{R}\right\}$. נוכל לכתוב קבוצה זו כאוסף האיברים:

$t\left(-1,1,1,0\right)+s\left(-1,-1,0,1\right)$, ושני הוקטורים הקבועים הנכפלים כאן מהווים בסיס למרחב האפס:

$$N\left(A\right)=span\left\{\left(-1,1,1,0\right),\left(-1,-1,0,1\right)\right\}$$

שאלה 3

יהיו
$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

א) דרג את המטריצה A, ואת המטריצה המורחבת $(A\,|b)$

ב) מה הן הדרגות rank של המטריצות מסעיף א' והאם נובע שיש או אין פתרון למערכת $Ax=b$?

ג) מהוא מימד הפתרונות למערכת ההומוגנית המתאימה?

ד) מצאו בסיס למרחב האפס של A.

ה) בדקו שהוקטור $(1,-1,1,-1)$ מהווה פתרון למערכת $Ax=b$ ומצו פתרון כללי למערכת זו.

פתרון:

שימו לב להפרש הקבוע 4 בין איבר לזה מעליו- מה שעוזר בדירוג ...ונקבל בסוף צורה מדורגת:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&-2&2\\0&1&2&3&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

ב) מצורת המטריצה המדורגת - כולל הוקטור הנוסף - נקבל שקיים פתרון כי $rank\,(A)=rank\,(A\,|b)$, כמספר השורות השונות מאפס בצורה מדורגת!

ג) מימד מרחב הפתרונות להומוגנית הוא 2 (יש שני משתנים חופשיים!)

ד) בסיס למרחב האפס בעזרת המשתנים החופשיים ופרמטרים:

$$\left\{\begin{pmatrix}s+2t\\-2s-3t\\s\\t\end{pmatrix}|t,s\in\mathbb{R}\right\}$$

פתרון כללי למערכת $Ax=b$ יהיה:

$$\begin{pmatrix}s+2t\\-2s-3t\\s\\t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$ עם $s,t\in\mathbb{R}$.

שאלה 4

א) האם מרחב השורה בהכרח שווה למרחב העמודה? אם כן, הוכיחו, אם לא תנו דוגמה נגדית

פתרון:

הפרכה: $A=\begin{pmatrix}1&4\\3&5\\3&6\end{pmatrix}$

$$R(A)=span\left\{\begin{pmatrix}1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&6\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^2$$

$$C(A)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$$

ב) תנו דוגמה למשפחה של מטריצות שמרחב השורות שלהן שווה למרחב העמודות שלהן.

פתרון:

למשל, מטריצות סימטריות (אלה מטריצות המקיימות: $A^T=A$), שבהן עמודות של A הן שורות של A^T.