



תרגיל 1 - פתרון

שאלה 1

א. מצא 3 רכיבים ראשונים בטור טיילור של $\sin \pi x$ סביב הנק' $a = 0.5$.
 ב. בעזרת הפיתוח שמצאת בסעיף א' מצא קירוב ל $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$.

פתרון:

א.

$$f(x) = \sin \pi x. \quad \text{So} \quad f^{(1)}(x) = \pi \cos \pi x, \quad f^{(2)}(x) = -\pi^2 \sin \pi x, \quad f^{(3)}(x) = -\pi^3 \cos \pi x, \\ f^{(4)}(x) = \pi^4 \sin \pi x \quad \text{and so}$$

$$\sin \pi x = \sin \frac{\pi}{2} + \frac{(x - \frac{1}{2})^2}{2!} \times (-\pi^2) + \frac{(x - \frac{1}{2})^4}{4!} \times (\pi^4) + \dots = 1 - \pi^2 \frac{(x - \frac{1}{2})^2}{2!} + \pi^4 \frac{(x - \frac{1}{2})^4}{4!} + \dots$$

ב.

$$\sin \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10} \right) = 1 - \pi^2 \frac{(\frac{1}{10})^2}{2!} + \pi^4 \frac{(\frac{1}{10})^4}{4!} + \dots = 1 - 0.0493 + 0.0004 = 0.9511$$

שאלה 2:

א. מצא שלושה רכיבים ראשונים בטור מקלורן של $\sin(\sin x)$.
 ב. בעזרת התוצאה מסעיף א' חשב את הגבול הבא: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(\sin x)}{x^3}$.

פתרון:

א.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ \Rightarrow \sin(\sin x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) - \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right)^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right)^5}{5!} + \dots \\ = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{3x^5}{3!3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \dots$$

ב.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(\sin x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \dots \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} - \dots}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{10} \right) = \frac{1}{3}$$



שאלה 3:

תוך שימוש בנוסחאות טיילור מתאימות חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)}{x^4}$$

א.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{12} + \frac{o(x^4)}{x^4}\right) = -\frac{1}{12}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{1+x} - \sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(2x - \frac{8x^3}{3!} + o(x^3)\right)}{x}$$

ב.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{3}{2}x + o(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{3}{2} + \frac{o(x)}{x}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1+x-x^2+o(x^2)\right) - \left(1+x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

ג.

שאלה 4:

המשוואה $e^{-2x} = 3x^2$ בעלת שורש בסביבת $x = 0$.
מצא קירוב לשורש זה בעזרת טור טיילור המתאים ל- e^{-2x} .

פתרון:

$$e^{-2x} \approx 1 + (-2x) + \frac{(-2x)^2}{2!} = 1 - 2x + 2x^2.$$

$$\Rightarrow 1 - 2x + 2x^2 = 3x^2$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \begin{cases} 0.414 \\ -1.41 \end{cases} \quad \leftarrow$$

שאלה 5:

בעזרת טור מקלורן של e^x , עבור $x = \frac{1}{2}$, חשב את \sqrt{e} בדיוק של ארבע ספרות אחרי הנקודה.

פתרון:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$



כאשר c בין 0 ל- x .

מכאן, עבור $x = \frac{1}{2}$ נקבל:

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 2!} + \dots + \frac{1}{2^n n!} + \frac{e^c}{2^{n+1}(n+1)!}$$

כאשר c בין 0 ל- $\frac{1}{2}$. גודל השגיאה בקרוב הוא אם כן:

$$|R_n| = \left| \frac{e^c}{2^{n+1}(n+1)!} \right| < \frac{3}{2^{n+1}(n+1)!}$$

הדיוק הרצוי הינו 4 ספרות אחרי הנקודה, לכן

$$\frac{3}{2^{n+1}(n+1)!} < 0.00005$$

נקבל כי $n = 6$ והקרוב הרצוי הינו

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 2!} + \frac{1}{2^3 3!} + \frac{1}{2^4 4!} + \frac{1}{2^5 5!} + \frac{1}{2^6 6!} = 1.6487$$

שאלה 6:

הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$

הוכחה:

א. נוכיח כי $\sin x < x$ לכל $x > 0$

$$f(x) = \sin x - x$$

ולכן הפונקציה $f(x)$ יורדת לכל $x > 0$

$$f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$$

$$f(x) < f(0) = 0$$

ב. נוכיח כי $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$ לכל $x > 0$

$$g(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x$$

$$g'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$$

לכל $x > 0$ $g''(x) = -x + \sin x < 0$ (הוכחנו בסעיף א')