תרגיל בית 6 – טופולוגיה

שאלה 1

קבעו לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות אם היא פתוחה/ סגורה/ רציפה:

א. $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{|x|} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$.

ב. $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f_2(x)=\chi_{\mathbb{Q}}=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

ג. $f_3:X\to\mathbb{R}$ עבור $X=[2,3]\cup[4,5)$ המוגדרת ע"י $f_3(x)=\begin{cases}1 & x\in[2,3]\\ x & x\in[4,5)\end{cases}$.

שאלה 2

יהיה X מ"ט. $A\subseteq X$ תת מרחב, אזי $S\subseteq A$ סגורה ב- A $\Leftrightarrow$ קיימת $Q\subseteq X$ סגורה ב- X כך ש- $S=Q\cap A$.

שאלה 3

הוכיחו:

א. כל פונקציה ממרחב טופולוגי דיסקרטי לכל מרחב טופולוגי אחר – הינה רציפה.
ב. כל פונקציה ממרחב טופולוגי כלשהו למרחב הטופולוגי הטריוויאלי – הינה רציפה.
ג. תהי $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ רציפה. נניח כי $\tau_3\subseteq\tau_2$ וגם $\tau_1\subseteq\tau_4$. הוכיחו כי $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_3)$ וגם $f:(X,\tau_4)\to(Y,\tau_2)$ רציפות.

שאלה 4

תהי $f:X\to Y$ פונקציה בין שני מרחבים טופולוגיים. ניתן לראות את $f(X)$ כתת מרחב טופולוגי של Y.

א. הוכיחו שאם f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- Y אזי היא פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- $f\left(X\right)$.

ב. הראו ע"י שתי דוגמאות נגדיות שמהעובדה ש- f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- $f\left(X\right)$ לא נובע ש- f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- Y.

שאלה 5

יהיו $m,c\in\mathbb{R}$ שני מספרים נתונים. נגדיר תת מרחב של $\mathbb{R}^2$:

$X=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 : y=mx+c\right\}$. הוכיחו ש- X הומיאומורפי ל- $\mathbb{R}$.

שאלה 6

יהי $\left(X,\|\ \|\right)$ מרחב נורמי, $a\in X, c\in\mathbb{R}$. הוכיחו שהפונקציות הבאות רציפות:

1. העתקת הנורמה- $f:\left(X,\|\ \|\right)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=\|x\|$ (שני המרחבים הם מרחבים מטריים).
2. הזזה- $g:\left(X,\|\ \|\right)\to\left(X,\|\ \|\right)$ המוגדרת ע"י $g(x)=x+a$.
3. כפל בסקלר- $h:\left(X,\|\ \|\right)\to\left(X,\|\ \|\right)$ המוגדרת ע"י $h(x)=cx$.
4. הסיקו כי כל כדור פתוח $B(a,\varepsilon)$ ($\varepsilon>0,\ a\in X$) הומיאומורפי ל-$B\left(0,1\right)$.

בהצלחה!