אלגברה לינארית 1 - הרצאה 9

תזכורת:

$A\in\mathbb{F}^{m\times n}$.

$R(A) =$ מרחב השורות

$C(A) =$ מרחב העמודות

$rank(A)=\dim R(A)=\dim C(A)$

הדרגה

$rank(A) =$ מספר המשתנים התלויים בצורה מדורגת של A

$=$ כמות השורות הבת"ל $=$ כמות העמודות הבת"ל

$N(A) =$ מרחב האפס

$\dim N(A) =$ מספר המשתנים החופשיים בצורה מדורגת של A

פרק 5: העתקות לינאריות

הגדרה:

יהיו V ו- W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$.

העתקה לינארית מ- V ל- W היא פונקציה $T:V\longrightarrow W$

שמקיימת את התנאים הבאים:

החיבור של V החיבור של W

א. לכל $v_1,v_2\in V$, $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$.

ב. לכל $v\in V$ ולכל $\alpha\in\mathbb{F}$, $T(\alpha v)=\alpha T(v)$.

הכפל בסקלר של V הכפל בסקלר של W

<u>דוגמאות:</u>

א. $T:\overset{V}{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \overset{W}{\mathbb{R}^2}$ לפי $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\x-y\end{pmatrix}$.

נראה כי T העתקה לינארית. אכן,

- יהיו $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$.

$$T\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+y_1+y_2\\x_1+x_2-y_1-y_2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_1-y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2+y_2\\x_2-y_2\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$$

- יהי $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x+\alpha y\\\alpha x-\alpha y\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x+y\\x-y\end{pmatrix}=\alpha T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

לכן T העתקה לינארית.

ב. $T:\underset{V}{\mathbb{R}^{2\times2}}\longrightarrow\underset{W}{\mathbb{R}^3}$ שמוגדרת לפי $T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c+d\end{pmatrix}$.

נראה כי T העתקה לינארית.

- יהיו $\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$.

$$T\left(\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}a_1+a_2&b_1+b_2\\c_1+c_2&d_1+d_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+a_2\\b_1+b_2\\c_1+c_2+d_1+d_2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1+d_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2+d_2\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}$$

$$T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$$

• תהי $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$T\left(\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c + \alpha d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c+d \end{pmatrix} = \alpha T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

לכן T העתקה לינארית.

ג. $T: \mathbb{F}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{F}^{n\times m}$ המוגדרת לפי $T(A) = A^t$ היא העתקה לינארית.

ד. $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת לפי $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy$ היא לא העתקה לינארית.

למה?

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \qquad T\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\cdot 2 = 4$$

$$2\cdot T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \neq T\left(2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 4$$

<u>הערה:</u>

נהוג לסמן Tv במקום $T(v)$.

<u>טענה:</u> (הקריטריון המקוצר לבדיקת העתקה לינארית)

יהיו V ו-W מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$, ותהי $T: V \longrightarrow W$ פונקציה. T העתקה לינארית אם ורק אם לכל $v_1, v_2 \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$, $T(v_1 + \alpha v_2) = Tv_1 + \alpha Tv_2$.

<u>הוכחה:</u>

$\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש-T העתקה לינארית. יהיו $v_1, v_2 \in V$ ו-$\alpha \in \mathbb{F}$.

$$T(v_1 + \alpha v_2) \underset{\text{א'}}{=} T(v_1) + T(\alpha v_2) \underset{\text{ב'}}{=} Tv_1 + \alpha Tv_2$$

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח ש-T מקיימת את התנאי הנתון. נוכיח ש-T העתקה לינארית.

א. יהיו $v_1,v_2\in V$. צ"ל $T(v_1+v_2)=Tv_1+Tv_2$. אכן

$$T(v_1+v_2)=T(v_1+1_{\mathbb{F}}\cdot v_2)=Tv_1+1_{\mathbb{F}}Tv_2=Tv_1+Tv_2.$$

ב. יהי $v\in V$ ו- $\alpha\in\mathbb{F}$. צ"ל $T(\alpha v)=\alpha Tv$. אכן,

$$T(\alpha v)=T(0_V+\alpha v)=T(0_V)+\alpha Tv\overset{?}{=}0_W+\alpha Tv=\alpha Tv$$

מדוע $T(0_V)=0_W$? מתקיים

$$T(0_V)=T(0_V+0_V)=T(0_V)+T(0_V)$$

ואם נחסר את $T(0_V)$ - לשני האגפים נקבל $T(0_V)=0_W$.

$\square$

מסקנה:

אם $T:V\longrightarrow W$ העתקה לינארית, אז $T(0_V)=0_W$.

טענה:

תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה. אז הפונקציה $L_A:\mathbb{F}^n\longrightarrow\mathbb{F}^m$

המוגדרת לפי $L_A(v)=Av$ היא העתקה לינארית.

דוגמה:

ההעתקה $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\x-y\end{pmatrix}$ גם שווה להעתקה

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\x-y\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=L_A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

דוגמה:

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times3}$.

$L_A:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$

$$L_A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y+3z\\4x+5y+6z\end{pmatrix}$$

הוכחת הטענה:

נעזר בקריטריון המקוצר: יהיו $v_1,v_2\in V$ ו- $\alpha\in\mathbb{F}$. צ"ל

$$L_A(v_1+\alpha v_2)=L_A(v_1)+\alpha L_A(v_2).$$

$$L_A(v_1+\alpha v_2)=A(v_1+\alpha v_2)=Av_1+A(\alpha v_2)=Av_1+\alpha Av_2=$$
$$=L_A(v_1)+\alpha L_A(v_2)$$

לכן L_A העתקה לינארית. $\square$

[**תרגיל:** (לקראת ההמשך)
צ"ל העתקה לינארית $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ היא מהצורה הנ"ל.
$T=L_A$
לאיזשהו A]

הערה:
באופן דומה, אפשר להגדיר לכל $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ העתקה $R_A:\mathbb{F}^{1\times m}\to\mathbb{F}^{1\times n}$

$$R_A(v)=vA$$

וגם R_A העתקה לינארית.

טענה: (העתקה לינארית)
יהיו V ו- W מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$, יהיו $T,S:V\to W$ הע"ל,
ויהי $\alpha\in\mathbb{F}$.

א. הפונקציה $T+S:V\to W$ המוגדרת לפי
$$(T+S)(v)=Tv+Sv$$
היא העתקה לינארית.

ב. הפונקציה $\alpha T:V\to W$ המוגדרת לפי
$$(\alpha T)(v)=\alpha Tv$$
היא העתקה לינארית.

הוכחה:

א. נסמן $R=T+S$. נוודא ש-R הע"ל לפי הקריטריון המקוצר.
יהיו $v_1,v_2\in V$ ויהי $\beta\in\mathbb{F}$.

$$R(v_1+\beta v_2)=(T+S)(v_1+\beta v_2)=T(v_1+\beta v_2)+S(v_1+\beta v_2)=$$
$$=Tv_1+\beta Tv_2+Sv_1+\beta Sv_2=$$
$$=Tv_1+Sv_1+\beta(Tv_2+Sv_2)=Rv_1+\beta Rv_2$$

לכן R הע"ל.

ב. נסמן $R=\alpha T$. נוודא ש-R הע"ל לפי הקריטריון המקוצר.
יהיו $v_1,v_2\in V$ ויהי $\beta\in\mathbb{F}$.

$$R(v_1+\beta v_2)=(\alpha T)(v_1+\beta v_2)=\alpha\, T(v_1+\beta v_2)=$$
$$=\alpha(Tv_1+\beta Tv_2)=\underbrace{\alpha T}_{R}v_1+\beta(\underbrace{\alpha T}_{R}v_2)=Rv_1+\beta Rv_2$$

לכן R הע"ל.

$\square$

מסקנה:

homomorphism

אוסף כל ההעתקות הלינאריות מ-V ל-W, שמסומן $\mathrm{Hom}(V,W)$,
הוא מרחב וקטורי ביחס לפעולות הנ"ל.

מי איבר האפס? $0:V\to W$ שנתונה לפי $0(v)=0_W$.

טענה:

יהיו U,V,W מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$, תהי $T:U\to V$ הע"ל,
ותהי $S:V\to W$ הע"ל. אז $S\circ T:U\to W$ הע"ל.

[תזכורת: $(S\circ T)(u)=S(T(u))$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend left, "S\circ T"] & V \arrow[r, "S"] & W \end{tikzcd}$$

הוכחה:

לפי הקריטריון המקוצר:

יהיו $u_1,u_2\in U$ ויהי $\alpha\in\mathbb{F}$.

$$(S\circ T)(u_1+\alpha u_2)=S(T(u_1+\alpha u_2))\underset{T\text{ ה"ל}}{=}S(Tu_1+\alpha Tu_2)=$$

$$\underset{S\text{ ה"ל}}{=}S(Tu_1)+\alpha S(Tu_2)=(S\circ T)u_1+\alpha(S\circ T)u_2$$

לכן $S\circ T$ ה"ל. $\square$

הגדרה:

העתקת הזהות של V היא ההעתקה $I:V\to V$

$I(v)=v$

זו ודאי ה"ל.

$$I(v_1+\alpha v_2)=v_1+\alpha v_2=I(v_1)+\alpha I(v_2)$$

"שאלה":

מה צריך כדי להגדיר העתקה לינארית?

דוגמה:

האם קיימת העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ המקיימת

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix},\qquad T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\ ?$$

אילו הייתה כזו, אז

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T\left(\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}\right)=T\left(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=$$

$$= x\cdot T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\cdot T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y\\-x+2y\\4x+2y\end{pmatrix}$$

וזו העתקה. (אפשר לבדוק)

<u>דוגמה:</u>

האם קיימת העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ המקיימת

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \ ?$$

לא!

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

<u>דוגמה:</u>

האם קיימת העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ המקיימת

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} \ ?$$

ניקח וקטור כללי במרחב $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, ונרצה להציג אותו כצירוף לינארי של $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+\beta\\\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta = x\\ \beta = y\end{cases} \Rightarrow \alpha = x-y \qquad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (x-y)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

וההעתקה הלינארית חייבת להיות

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (x-y)\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\-x+4y\\4x-4y\end{pmatrix}$$

משפט: (משפט ההגדרה)

יהיו V ו-W מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$. יהי $v_1,\dots,v_n$ בסיס של V, ויהיו $w_1,\dots,w_n \in W$ וקטורים כלשהם. אז קיימת העתקה יחידה $T: V \to W$ המקיימת $Tv_i = w_i$ לכל $1 \le i \le n$.