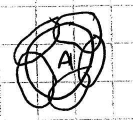
(1) 24.11.13

הרצאה 2 (תרגול)

<u>הגדרה:</u> תהי m מידה המוגדרת על חוג σ מחדה Σ_m עם יחידה E שהם קבוצות, של המספר:

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} m(B_n)\ \middle|\ A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,\ B_n\in\Sigma_m\right\}$$

$[\ m([0,1])=1-0=1\ ]$



<u>הערה:</u> כל מידה חיצונית μ^* היא תת-אדיטיבית בת מניה σ-מחדה, כלומר, אם $A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ אז $\mu^*(A)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)$ ובפרט μ^* מונוטונית – $A\subset B$, $\mu^*(A)\le\mu^*(B)$

תהי μ^* המידה החיצונית המושרית מהמידה m כאשר m היא המידה המוגדרת על החוג σ מחדה של כל הקטעים ב $\mathbb{R}$ ומתאימה לכל קטע את אורכו. קל לבדוק ש μ^* נותנת גם לכל קטע את אורכו.

נוכיח שאם A היא קבוצה בת מניה אז $\mu^*(A)=0$.

<u>פתרון:</u> ניתן לרשום $A=\{x_1,x_2,x_3\ldots\}$ (בגלל ש A בת מניה ניתן לספור את האיברים)

יהי $\varepsilon>0$. נכסה את הנק' x_n ע"י הקטע $(x_n-\frac{\varepsilon}{2^n},x_n+\frac{\varepsilon}{2^n})$ ואז

$$A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(x_n-\frac{\varepsilon}{2^n},x_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$

מהגדרת המידה החיצונית μ^* נקבל ש:

$$\mu^*(A)\le\sum_{n=1}^{\infty}m\left(\left(x_n-\frac{\varepsilon}{2^n},x_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\varepsilon}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}=2\varepsilon$$

ולכן $\mu^*(A)\le 2\varepsilon$ לכל $\varepsilon>0$ ולכן $\mu^*(A)=0$.

הוכחנו שהמידה של קבוצה בת מניה היא 0.
נבדוק אם יש עוד קבוצות שהמידה שלהן היא 0.

<u>קנטור:</u> נראה עכשיו דוגמה לקבוצה E לא בת מניה כך ש $\mu^*(E)=0$.

נתחיל לבנות את הקבוצה E. עבור כל $n\ge1$ נגדיר את הקבוצות E_n באופן הבא:

$E_1=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$

$E_2=[0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]\cup[\frac{8}{9},1]$

נגדיר $E=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$

טענה: E לא בת מניה

2 24.11.13

הוכחה: נניח בשלילה ש E בת מניה אז יהיה סידור $E=\{x_n : n\ge 1\}$

נסמן ב J_1 את הקטע מבין שני הקטעים המרכיבים את E_1 כך ש J_1 $x_1\notin$.

נסמן ב J_2 את הקטע מבין 2 הקטעים החלקיים ל J_1 שעבורו $x_2\notin J_2$

($J_2\subseteq E_2, J_1\subseteq E_1$)!

וכך נמשיך ונמצא קטע $J_n \overset{?}{\subset} J_{n+1}\subset E_{n+1}$ כך ש $x_n\notin J_n$

נסמן $J=\bigcap_{n\ge1} J_n$.

כיוון ש $J_n\subset J_{n+1}$ אז מאינפי ידועים שקיימת $x_0\in J$

ולכן בפרט $x_0\in E$ כי $E=\left(\bigcap E_n\right)\supset\left(\bigcap J_n\right)$ (כי $J_n\subset E_n$)

כיוון ש $E=\{x_1,x_2,x_3\dots\}$ אז קיים n_0 קבוע כך ש $x_0=x_{n_0}$, $n_0\ge1$

אבל ידועים מהבנייה ש $\underline{x_{n_0}\notin J_{n_0}}$, אבל מצד שני $\underline{x_0\in J_{n_0}}$ כי $x_0\in\bigcap_{n\ge1}J_n$

וזו סתירה. ולכן E לא בת מניה.

נוכיח ש $\mu^*(E)=0$.

מהבנייה של הקבוצות E_n נובע ש E_n מורכב מ 2^n קטעים כאשר אורך כל קטע $\frac{1}{3^n}$.

ולכן כיוון ש μ^* תת-אדיטיבית:

$$\mu^*(E_n)\le\sum_{i=1}^{2^n}\mu^*(I_i)=\frac{2^n}{3^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

פונקציות מדידות

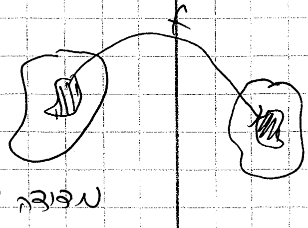
נסמן ב $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ את משפחת קבוצות בורל ב $\mathbb{R}$.

נאמר שהפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא מדידה אם אחד מהתנאים השקולים הבאים מתקיים:

1. $\{x \mid f(x)<a\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ לכל $a\in\mathbb{R}$
2. $\{x \mid f(x)\le a\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ לכל $a\in\mathbb{R}$
3. $\{x \mid f(x)>a\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ לכל $a\in\mathbb{R}$
4. $\{x \mid f(x)\ge a\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ לכל $a\in\mathbb{R}$

1. $f^{-1}((-\infty,a))\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$
2. $f^{-1}((-\infty,a])\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

התמונה ההפוכה של קבוצת בורל תהיה קבוצת בורל



מדידה לפי לבג ⇐ בורל