תרגיל 5 - פתרונות חלקיים

10 בפברואר 2013

1. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ מטריצה ממשית ($A \in M_4(\mathbb{R})$). מצא $V, W \subseteq \mathbb{R}^4$ תתי מרחבים אינווריאנטיים תחת כפל ב A עם מימד 2 כך ש $V \bigoplus W = \mathbb{R}^4$. יש לפתור את התרגיל בלי להסתמך על תרגיל 2.

(רמז: חשב את הפולינום האופייני של A והתייחס אל A כאל מטריצה מרוכבת).

2. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$, $f(\lambda)$ פולינום האופייני של A, $f = p_1(\lambda)p_2(\lambda)$ כאשר p_1, p_2 הם פולינומים זרים, כלומר $gcd(p_1, p_2) = 1$. נסמן $V = \mathbb{F}^n$.

(א) נסמן $T_i(v) := P_i(A)v$, $W_i = \ker T_i$ הוכח: לכל i, W_i הוא מרחב אינווריאנטי תחת כפל ב A.

(ב) הוכח $V = W_1 \bigoplus W_2$. (תזכורת: מאלגוריתם אוקלידס של חילוק פולינומים נובע שאם p_1, p_2 הם פולינומים זרים, אזי קיימים פולינומים f_1, f_2 כך ש $f_1p_1 + f_2p_2 = 1$).

פתרון:

(א) יהי $v \in W_i$. נראה $Av \in W_i$. נשים לב: $P_i(A)Av = AP_i(A)v = A \cdot \bar{0} = 0$.

(ב) נראה ש $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. לפי התזכורת, קיימים פולינומים f_1, f_2 כך ש $f_1(x)P_1(x) + f_2(x)P_2(x) = 1$. אם נציב את A במקום x נקבל את מטריצת היחידה. כלומר $v = Iv = f_1(A)P_1(A)v + f_2(A)P_2(A)v = 0 + 0 = 0$. כמו כן, נשים לב ש $P_2(A)P_1(A)v = 0$ ולכן $P_1(A)v \in W_2$. באופן דומה, $P_2(A)v \in W_1$. מכיוון ש W_i אינווריאנטי לכפל ב A הוא אינווריאנטי לכפל בפולינום ב A ולכן $f_1(A)P_1(A)v \in W_2$, $f_2(A)P_2(A)v \in W_1$, מכאן של כל וקטור $v \in W_1 + W_2$. לכן $W_1 + W_2 = \{0\}$.

3. יהי V מרחב וקטורי, $W \subseteq V$ ת"מ.

(א) הוכח קיים $W' \subseteq V$ כך ש $W \bigoplus W' = V$.

(ב) נגדיר הטלה $P : V \mapsto V$ באופן הבא: עבור $w \in W, w' \in W'$ אנו נגדיר $P(w+w') = w$.
יהי $T : V \mapsto V$ אופרטור. הוכח: W הוא אינווריאנטי תחת T אם ורק אם $PTP = TP$.

פתרון:

(א) נשלים את הבסיס של W לבסיס של V על ידי הוספת וקטורים $\left\{w_1^{'}, \ldots, w_k^{'}\right\}$. ניקלח $W^{'} = span\left\{w_1^{'}, \ldots, w_k^{'}\right\}$. קל לראות ש $V = W' \oplus W$.

(ב) נניח ש $TP = PTP$. נראה ש W הוא Tאינווריאנתי. יהי $w \in W$. ראשית - נשים לב ש $v \in W \Leftrightarrow Pv = v$ נראה שלכל $w \in W$, $T(w) \in W$. נניח בשלילה שלא. יהי $w \in W$ כך ש $T(w) \notin W$. אזי $PTP(w) = PT(w)$. אבל $T(w) \notin W$, ולכן $PT(w) \neq T(w)$. סתירה. כיוון שני - טריוויאלי.

4. נתבונן במטריצה ממשיות, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. לכל ערך עצמי λשל A מצא את המרחב העצמי המוכלל המתאים V_λ, ואת המטריצה המייצגת של העתקה T_A, $(T_A(v) = Av)$ המצומצמת לV_λ . הכלל את הדוגמה ל n כללי.

פתרון: הפולינום האופייני הוא $(\lambda - 3)(\lambda + 1)^3$. קל לראות ש $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי לכל $n - 1$, כמו כן אם נבדוק את -1 אף הוא ערך עצמי של V עם ריבוי $n - 1$ ונפרש על ידי הפתרונות של המשוואה $x_1 + \ldots + x_n = 0$, כלמר הריבוי הגאומטרי הוא -1.

5. תהי $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ מטריצה ממשית.

(א) מצא ערכים העצמיים והמרחבים העצמיים המוכללים של המטריצה.

(ב) חשב את המטריצה המייצגת של העתקה T_A המצומצמת לכל מרחב עצמי ביחס לבסיס שלו.

(ג) בטא את המטריצה המייצגת של T_A כמטריצת בלוקים אלכסונית ביחס לבסיס מתאים.

פתרון:

(א) נחשב את הפולינום האופייני ונקבל $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$. נמצא את השורשים על פי הקישור, ונקבל שהפולינום מתפרק ל $(x-2)^2(x-1)^2$. נחשב את מרחב האפס של $(A-2I)^2$ ו $(A-I)^2$. $(A-I)^2 =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

נשים לב, ש $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא ערך עצמי של $(A-I)^2$, ו $(A-I)\,v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

נשים לב ש $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא ערך עצמי של $(A-2I)^2$, ו$(A-I)\,v =$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(ב) עבור ערך עצמי 1 מקבלים $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ועבור 2 מקבלים $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix}$.

(ג) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(הערה: אם אינכם יודעים איך להתמודד עם משוואות ממעלה 4 ־ נא לקרוא $http://u.cs.biu.ac.il/\ tsaban/LinearAlgebra/LAT73/RootSearch.pdf$).