בס"ד

אלגברה לינארית 2 - תירגול 1 (המחלקה למתמטיקה)

הנושא: דטרמיננטות (רק לפי תמורות)

לכל מטריצה ריבועית $A\in F^{n\times n}$ מתאים מספר מיוחד שנקרא - "הדטרמיננטה של A" ומסומן ב- $\det(A)$ או $|A|$.

דוגמאות:

1. אם $A=(a_{11})\in F^{1\times 1}$ (מטריצה מסדר 1×1) אז:

$$\det(A)=|a_{11}|=a_{11}$$ (למשל: $|3|=3$)

2. אם $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in F^{2\times 2}$ (מטריצה מסדר 2×2) אז:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

(האלכסון הראשי פחות האלכסון המשני)

למשל:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7\end{pmatrix},\ |A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7\end{vmatrix}=2\cdot 7-3\cdot 5=-1$$

3. אם $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\in F^{3\times 3}$, אז:

(משלשים שנוצרים ע"י מקבילים לאלכסון הראשי) (אלכסון ראשי)

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}.$$

(משלשים שנוצרים ע"י מקבילים לאלכסון המשני) (אלכסון משני)

שיטה נוספת לחישוב הדטרמיננטה של מטריצה A מסדר 3×3:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

מורידים את השורה והעמודה שבה a_{11} נמצא

שימו לב שיש כאן מינוס!

מורידים את השורה והעמודה שבה a_{12} נמצא.

לדוגמא:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1\end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot(-1+10)+1(0+8)+3(0-4)=14$$

בס"ד

תמורות

הגדרה: תמורה היא פונקציה חח"ע ועל $\sigma:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$, כלומר, סידור מחדש של המספרים $1,\dots,n$.

סימון: אוסף כל התמורות על n איברים מסומנת ב- S_n.

הערה: ב- S_n יש $n!$ תמורות.

דוגמא: נמצא את כל התמורות ב- S_3 (אוסף כל התמורות על 3 איברים: 1,2,3) ונראה ע"י 2 הצגות - הצגה של מחזור והצגה של פונקציה. (יש סה"כ $3!=6$ תמורות)

פורמלית: $\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix}$

פורמלית: $(1,\sigma(1),\sigma(\sigma(1)),\dots,\sigma^{n-1}(1))$

הצגה של פונקציה	הצגה של מחזור
(כל איבר עובר לעצמו) $id=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$(1)(2)(3)$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$(1)(2,3)$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$(1,2)(3)$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$(1,2,3)$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$(1,3,2)$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$(1,3)(2)$

שימו לב שזה לא אותו דבר
אבל: $(1,2,3)=(2,3,1)$ כן אותו דבר.

דוגמא נוספת: נמצא את כל התמורות ב- S_2:

הצגה של פונקציה	הצגה של מחזור
(כל איבר עובר לעצמו) $id=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$	$(1)(2)$
$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$	$(1,2)$

בס"ד

הגדרה: היפוך סדר בתמורה זה כאשר יש מצב ש- $i<j$ אבל $\sigma(i)>\sigma(j)$

לדוגמא: בתמורה $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(1,2,3)$ ישנם 2 היפוכי סדר:

(I). $1<3$

אבל: $\underset{2}{\sigma(1)} > \underset{1}{\sigma(3)}$

(II). $2<3$

אבל: $\underset{3}{\sigma(2)} > \underset{1}{\sigma(3)}$

כדי למצוא את כל ההיפוכים בתמורה יש טריק: נחבר בקווים בין כל שני מס זהים בתמורה (בהצגה של פונקציה)! מס ה-x-ים שנקבל זה מס ~~ה...~~ ההיפוכים בתמורה. לדוגמא:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

2 היפוכי סדר.

סימון: $h(\sigma)=$ מס היפוך הסדר בתמורה.

הגדרה: הסימן של תמורה σ הוא: $sign(\sigma)=(-1)^{h(\sigma)}$

דוגמאות:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow sign(\sigma_1)=(-1)^1=-1$$

$$\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\Rightarrow sign(\sigma_2)=(-1)^3=-1$$

$$\sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\Rightarrow sign(\sigma_3)=(-1)^2=1$$

תמורה בעלת $sign=1$ נקראת תמורה זוגית. (כמו σ_3 בדוגמאות לעיל)

תמורה בעלת $sign=-1$ נקראת תמורה אי-זוגית (כמו σ_1,σ_2 " " ")

הגדרת הדטרמיננטה באמצעות תמורות

הגדרה: לכל $A\in F^{n\times n}$ נגדיר:

$$\det(A)=|A|=\sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdots\cdots a_{n\sigma(n)}$$

דוגמאות:

דוג'

① . $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, זו מטריצה 2×2 , לכן נסתכל על התמורות ב-S_2 .

ב-S_2 זוכרים שיש 2 תמורות: $\sigma_1=id=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} \Longrightarrow sign(\sigma_1)=(-1)^0=1$

$\sigma_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} \Longrightarrow sign(\sigma_2)=(-1)^1=-1$

לכן:

$$|A| = sign(\sigma_1)\cdot a_{1\sigma_1(1)}\cdot a_{2\sigma_1(2)} + sign(\sigma_2)\cdot a_{1\sigma_2(1)}\cdot a_{2\sigma_2(2)} =$$

$$= 1\cdot a_{11}\cdot a_{22} + (-1)\cdot a_{12}\cdot a_{21} =$$

$$= a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

(שזה בדיוק האלכסון הראשי פחות האלכסון המשני)

② . $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ (זו מטריצה 3×3) לכן נסתכל על התמורות ב-S_3 :

התמורות	sign	$sign(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$
$\sigma_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$	$(-1)^0=1$	$1\cdot a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}$
$\sigma_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$	$(-1)^1=-1$	$(-1)\cdot a_{11}a_{23}a_{32}$
$\sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$	$(-1)^1=-1$	$(-1)\cdot a_{12}a_{21}a_{33}$
$\sigma_4=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$	$(-1)^2=1$	$1\cdot a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}$
$\sigma_5=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$	$(-1)^2=1$	$1\cdot a_{13}a_{21}a_{32}$
$\sigma_6=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$	$(-1)^3=-1$	$(-1)\cdot a_{13}a_{22}a_{31}$

בסה"כ קבלנו:

$$|A| = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

שזה בדיוק מה שקיבלנו בתחילת השיעור בשיטת האלכסונים.

ד״ר

הרכבת תמורות $\sigma, \tau \in S_n$: $\sigma\circ\tau(i) = \sigma(\tau(i))$ לכל $i=1,\dots,n$.

דוגמא: $\tau=(3,1,2)\in S_4$, $\sigma=(1,4,2)$. אז:

$$\sigma\circ\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}=(2,3,4)$$

מתחילים מפה

לעומת זאת:

$$\tau\circ\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}=(1,4,3)$$

ברור ש: $\sigma\circ\tau\neq\tau\circ\sigma$.

תמורה הפוכה

לכל $\sigma\in S_n$ קיים $\sigma^{-1}\in S_n$ כך ש: $\sigma\circ\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\circ\sigma=id$

לדוגמא- מה ההופכי של $\sigma=(1,3,2)\in S_4$?

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}=(1,3,2)$$

נחליף את השורות ונסדר לפי הסדר הטבעי:

$$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}=(1,2,3)$$

הערות:

1. מהצגת תמורה כמחזור אי אפשר לדעת לאיזה S_n היא שייכת.
למשל המחזור $\sigma=(1,4,2)$ יכול להיות שייך לכל S_n , $n\geq4$. לכן יש צורך להגדיר זאת במפורש.

2. אם $\beta\in S_6$, $\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&5&4&2&6\end{pmatrix}$ הוא המחזור: $\beta=(1,3,5,2)$
β יכול להיכתב גם כך:
$$\beta=(3,5,2,1)=(5,2,1,3)=(2,1,3,5)$$
אבל נהוג לבחור כאבר מחזור את המחזור עם המס׳ החיובי הקטן ביותר המופיע בהתחלה ולכן $\beta=(1,3,5,2)$.

3. איברים במחזור שעוברים לעצמם אינם רשומים במחזור.

משפט: כל תמורה ב-S_n אפשר לפרק למכפלת מחזורים זרים.
פירוק זה יחיד עד כדי סדר המחזורים (למשל: $(4,5)(1,2,3)=(1,2,3)(4,5)$).

הגדרה: מחזור מאורך 2 נקרא חילוף.

טענה: כל תמורה ב-S_n אפשר להציג כמכפלה של חילופים (לא זרים).

בס"ד

איך? כל תמורה מציגים כמכפלה של מחזורים זרים וכל מחזור מציגים כמכפלה של חילופים באופן הבא:

$$\underbrace{(a_1,a_2,\dots,a_n)}_{\text{מחזור באורך } n} = (a_1,a_n)(a_1,a_{n-1})\cdots(a_1,a_2)$$

דוגמא:

$$(1,2,3,4,5)=(1,5)(1,4)(1,3)(1,2)$$

ניתן גם לעשות זאת באופן הבא:

$$(a_1,a_2,\dots,a_n)=(a_1,a_2)(a_2,a_3)\cdots(a_{n-1},a_n)$$

דוגמא:

$$(1,2,3,4,5)=(1,2)(2,3)(3,4)(4,5)$$

דרך נוספת לחישוב סימן של תמורה

הערה: חילוף היא תמורה אי-זוגית וסימנה: (-1).

סימן של מחזור: מפרקים את המחזור לחילופים ואז:

$$\text{sign}\,\sigma = (-1)^{\text{מס' החילופים}}$$

כלומר, מפרקים את ~~המחזור~~ התמורה למחזור ואת המחזור לחילופים ואז - הסימן של התמורה הוא - $(-1)^{\text{מס' החילופים}}$.

* אם $\text{sign}\,\sigma = 1$ אז התמורה זוגית

ואם $\text{sign}\,\sigma = -1$ " " אי-זוגית.

דוגמא:

$$\sigma=(1,5,4,3,2)=(1,5)(5,4)(4,3)(3,2)$$

4 חילופים

$$\text{sign}\,\sigma=(-1)^4=1$$

התמורה σ זוגית.

בס"ד

תכונות של דטרמיננטות:

1. $|A| = |A^t|$.

2. $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$.

3. אם מטריצה $A\in F^{n\times n}$ היא מטריצה משולשית עליונה/תחתונה אזי
$|A| = a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn}$ = מכפלת איברי האלכסון הראשי של A

בפרט, $|I|=1$ (כי: $I=\begin{pmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&\ddots&\\0&&&1\end{pmatrix}$).

4. אם B מטריצה המתקבלת מ-A ע"י פעולת שורה אזי:

א. אם B המתקבלת מ-A ע"י כפל של אחת השורות בסקלר α אזי - $|A|=\frac{1}{\alpha}|B|$

ב. אם B המתקבלת מ-A ע"י החלפת שתי שורות אזי: $|A|=-|B|$

ג. אם B " " הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת אזי - $|A|=|B|$.

דוגמא:

$$\begin{vmatrix}2&6&16\\-3&-6&18\\5&12&35\end{vmatrix} = 2\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix}1&3&8\\1&2&-6\\5&12&35\end{vmatrix} = -6\cdot\begin{vmatrix}1&3&8\\0&-1&-14\\0&-3&-5\end{vmatrix} =$$

נבצע: $\frac{1}{2}R_1\to R_1$, $-\frac{1}{3}R_2\to R_2$ ולכן נכפיל את הדטרמיננטה בהופכיים

נבצע: $R_2-R_1\to R_2$, $R_3-5R_1\to R_3$ וזה לא משנה את הדטרמיננטה.

$$= -6\begin{vmatrix}1&3&8\\0&-1&-14\\0&0&37\end{vmatrix} = -6\cdot 1\cdot(-1)\cdot 37 = 222$$

נבצע $R_3-3R_2\to R_3$ שלא משנה את הדטרמיננטה

קיבלנו מטריצה מדורגת שהיא מטריצה משולשית עליונה, לכן נכפיל את איברי האלכסון.

משפט: A הפיכה $\iff |A|\neq 0$.

בס"ד

תרגיל: חשב את הדטרמיננטה -

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 \cdots 1 & & \alpha \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$R_1+\sum R_i \to R_1$ נוסיף את כל השורות לשורה הראשונה

$$= \begin{vmatrix} \alpha+n-1 & \alpha+n-1 & \cdots & \alpha+n-1 \\ 1 & \alpha & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ 1 & 1 & \cdots 1 & \alpha \end{vmatrix} \underset{\frac{1}{\alpha+n-1}R_1 \to R_1}{=} (\alpha+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ 1 & 1 & \cdots 1 & \alpha \end{vmatrix} =$$

$R_i-R_1 \to R_i\ ,\ i\neq 1$ נחסר מכל השורות את השורה הראשונה

$$= (\alpha+n-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \alpha-1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix} = \boxed{(\alpha+n-1)\cdot 1\cdot(\alpha-1)^{n-1}}$$

זו מטריצה משולשת עליונה

מש"ל.