1. מיצאו לאילו ערכי $a, b$ ממשיים הפונקציה הבאה רציפה בקטע $[-1,3]$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-a}{x-3}, & -1 \le x < 3 \\ b, & x = 3 \end{cases}$$

הפונקציה רציפה בקטע $[-1,3)$ כי שם היא הפונקציה $y = \frac{\sqrt{x+1}-a}{x-3}$ אשר רציפה בקטע זה לפי הפרש, מנה, הרכבה של פונקציות רציפות. נשאר לבדוק רק מתי $f(x)$ רציפה משמאל ב-$x = 3$.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{x+1}-a}{x-3}$$

המכנה שואף ל-0, המונה שואף ל-$2-a$, ולכן אם $a \neq 2$ אז הגבול לא קיים ובפרט הפונקציה לא רציפה משמאל ב-3. אם $a = 2$ אז לפי כפל בצמוד:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4}$$

כלומר כדי שהפונקציה תהיה רציפה בקטע צריך להתקיים $a = 2, b = \frac{1}{4}$.

2. יהי $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ פולינום ממעלה שלישית. הוכיחו כי יש לו (לפחות) שורש אחד ממשי.

הפולינום הוא ממעלה שלישית בפרט $a \neq 0$. אם $a > 0$ אז $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$, ובפרט קיים $x_0$ כך ש-$P(x_0) > 0$. כמו כן $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ ובפרט קיים $x_1$ כך ש-$P(x_1) < 0$. לכן לפי משפט ערך הביניים ($P(x)$ רציף בכל הממשיים) קיים $x_1 < t < x_0$ כך ש-$P(t) = 0$ כדרוש.
אם $a < 0$ אז $\lim_{x\to\infty} P(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} P(x) = \infty$ והפתרון ממשיך אותו דבר.

3. תהי $f$ פונקציה רציפה (כלומר, בכל הממשיים). הוכיחו כי קיים $c$ ממשי כך ש-$f(c) = \frac{c}{1-c^2}$.

נגדיר $g(x) = f(x)(1-x^2) - x$. הפונקציה $g(x)$ רציפה כמכפלה והפרש של פונקציות רציפות.
מתקיים $g(1) = -1, g(-1) = 1$ ולכן לפי משפט ערך הביניים יש $-1 < c < 1$ כך ש-$g(c) = 0$
כלומר $f(c)(1-c^2) - c = 0$ כלומר $f(c) = \frac{c}{1-c^2}$ כדרוש.

4. תהי $f: [0,1] \to [0,1]$ רציפה. הוכיחו כי קיימת נקודה $x_0 \in [0,1]$ כך ש-$f(x_0) = 2\sin(x_0)$.

נגדיר $g(x) = f(x) - 2sin(x)$, היא רציפה ב-$[0,1]$ כהפרש של פונקציות רציפות. מתקיים

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} < 0$$

(כי $f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 1 < \sqrt{2}$ כי $f: [0,1] \to [0,1]$)

וכן

$$g(0) = f(0) \geq 0$$

ולכן או ש-$g(0) = 0$ (ואז סיימנו עם $x_0 = 0$) או ש-$g(0) > 0$ ואז לפי משפט ערך הביניים יש $0 < x_0 < \frac{\pi}{4}$ כך ש-$g(x_0) = 0$ כלומר $f(x_0) = 2sin(x_0)$ כדרוש.

5. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קיבעו (והוכיחו) האם היא רציפה במ"ש בקטע הנתון:

א. $f(x) = xsin(x)$ ב-$(0, \infty)$.

נראה שהפונקציה לא רציפה במ"ש בקטע הנתון. נגדיר

$$x_n = 2\pi n$$

$$y_n = \frac{1}{\mathrm{n}} + 2\pi n$$

כמובן $x_n - y_n \to 0$. כמו כן מתקיים

$$f(x_n) = 2\pi n\, sin(2\pi n) = 0$$

$$f(y_n) = \left(\frac{1}{\mathrm{n}} + 2\pi n\right) sin\left(\frac{1}{\mathrm{n}} + 2\pi n\right) = \left(\frac{1}{\mathrm{n}} + 2\pi n\right) sin\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right)$$

ולכן

$$f(y_n) - f(x_n) = \left(\frac{1}{\mathrm{n}} + 2\pi n\right) sin\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right) = \frac{1}{n} sin\left(\frac{1}{n}\right) + 2\pi n\, sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

המחובר השמאלי שואף ל-0 (מכפלה של שני גורמים השואפים ל-0), והמחובר הימני הוא

$$2\pi \frac{sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to 2\pi$$

ולכן סה"כ $f(y_n) - f(x_n) \to 2\pi \neq 0$ כלומר הפונקציה לא רציפה במ"ש בקטע הנתון.

ב. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ב-$(0,1)$.

נראה שהפונקציה לא רציפה במ"ש בקטע הנתון. נגדיר

$$x_n = \frac{1}{2\pi n}$$

$$y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$

כמובן $x_n - y_n \to 0$. כמו כן מתקיים

$$f(x_n) = sin(2\pi n) = 0$$

$$f(y_n) = sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

ולכן

$$f(\mathrm{x}_n) - f(\mathrm{y}_n) = -1 \to -1 \neq 0$$

ג. $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ ב-$(0,1)$.

הפונקציה רציפה ב-$(0,1)$, וכמו כן קיימים הגבולות מימין ב-0 ומשמאל ב-1:

$$\lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(פונקציה השואפת ל-0 כפול פונקציה חסומה)

$$\lim_{x\to 1^-} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin(1)$$

(הצבה בביטוי שרציף ב-1)

ולכן לפי תרגיל שפתרנו בכיתה, הפונקציה רציפה במ"ש ב-$(0,1)$.

להלן חזרה על הטיעון שכבר ראינו: מגדירים פונקציה חדשה $g(x)$ בקטע $[0,1]$:

$$g(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

וכיוון שהיא רציפה בקטע סגור אז לפי קנטור היא רציפה במ"ש שם, ולכן היא גם רציפה במ"ש ב-$(0,1)$, ובקטע זה הפונקציה מזדהה עם $f(x)$.

ד. $f(x) = \ln(x)$ ב-$(0,\infty)$

נראה שהפונקציה לא רציפה במ"ש בקטע הנתון. נגדיר

$$x_n = \frac{1}{n}$$

$$y_n = \frac{2}{n}$$

מתקיים $x_n - y_n \to 0$. כמו

$$f(x_n) - f(y_n) = \ln\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{2}{n}\right) = -\ln(n) - \big(\ln(2) - \ln(n)\big) = -\ln(2) \to -\ln(2) \neq 0$$

ה. $f(x) = x^3$ ב-$(-\infty, 50]$

נראה שהפונקציה לא רציפה במ"ש בקטע הנתון. נגדיר

$$x_n = -n$$

$$y_n = -\left(n + \frac{1}{n}\right)$$

מתקיים $x_n - y_n \to 0$. כמו כן

$$f(x_n) - f(y_n) = -n^3 + \left(n + \frac{1}{n}\right)^3 = -n^3 + n^3 + 3n + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3} \to \infty \neq 0$$

ו. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ ב-$[0,\infty)$

נראה שהפונקציה לא רציפה במ"ש בקטע הנתון. נגדיר

$$x_n = 1 + \frac{1}{n}$$

$$y_n = 1 + \frac{2}{n}$$

מתקיים $x_n - y_n \to 0$. כמו כן

$$f(x_n) - f(y_n) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 1} - \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2 - 1} = \frac{1}{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}$$

$$= \frac{n^2}{2n+1} - \frac{n^2}{4n+4} = n^2\frac{(4n+4)-(2n+1)}{(2n+1)(4n+4)} = \frac{2n^3+3n^2}{(2n+1)(4n+4)} \to \infty \neq 0$$

6. הוכיחו כי חיבור וכפל בקבוע (ולכן גם חיסור) של פונקציות רציפות במ"ש, הוא פונקציה רציפה במ"ש.

(i) תהי $f(x)$ רציפה במ"ש ב-$\mathbb{R}$, ויהי $c \in \mathbb{R}$. נראה כי $cf(x)$ רציפה במ"ש ב-$\mathbb{R}$.

יהי $\epsilon > 0$. מחפשים $\delta > 0$ כך שלכל $x_1, x_2$ המקיימים $|x_1 - x_2| < \delta$ מתקיים $|cf(x_1) - cf(x_2)| < \epsilon$. אם $c = 0$ אז אגף שמאל=0 ולכן ודאי קטן מכל $\epsilon > 0$. אחרת, אי-השוויון שקול ל-

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{c}$$

כיוון ש-$f(x)$ רציפה במ"ש, אכן ניתן למצוא $\delta > 0$ כך שלכל $x_1, x_2$ המקיימים $|x_1 - x_2| < \delta$ מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{c}$, כדרוש.

(ii) יהיו $f(x), g(x)$ רציפות במ"ש, נראה כי $f(x) + g(x)$ רציפה במ"ש.

יהי $\epsilon > 0$. מחפשים $\delta > 0$ כך שלכל $x_1, x_2$ המקיימים $|x_1 - x_2| < \delta$ מתקיים
$$|f(x_1) + g(x_1) - f(x_2) - g(x_2)| < \epsilon$$

כיוון ש-$f(x)$ רציפה במ"ש, יש $\delta_1 > 0$ כך שלכל $x_1, x_2$ המקיימים $|x_1 - x_2| < \delta_1$ מתקיים

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2}$$

כמו כן כיוון ש-$g(x)$ רציפה במ"ש יש $\delta_2 > 0$ כך שלכל $x_1, x_2$ המקיימים $|x_1 - x_2| < \delta_2$ מתקיים

$$|\mathrm{g}(x_1) - \mathrm{g}(x_2)| < \frac{\epsilon}{2}$$

נבחר $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$ ואז לכל $x_1, x_2$ המקיימים $|x_1 - x_2| < \delta$ מתקיים הדרוש:

$$|f(x_1) + g(x_1) - f(x_2) - g(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

7. תהי $f$ פונקציה רציפה ב-$[a,\infty)$, ונתון כי קיים $\lim_{x\to\infty} f(x)$. הוכיחו כי $f$ רציפה במ"ש ב-$[a,\infty)$.

יהי $\epsilon > 0$. צריך למצוא $\delta > 0$ כך שלכל $x_1, x_2 \in [a,\infty)$ המקיימים $|x_1 - x_2| < \delta$ מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. נסמן $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. לפי הגדרת הגבול יש $A$ כך שלכל $x > A$ מתקיים $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$. לכן לכל $x_1, x_2 > A$ מתקיים (*)

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - L + L - f(x_2)| \le |f(x_1) - L| + |f(x_2) - L\} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$f(x)$ רציפה במ"ש ב-$[a, A+1]$ לכן יש $\delta' > 0$ כך שלכל $x_1, x_2 \in [a, A+1]$ המקיימים $|x_1 - x_2| < \delta'$ מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. (**)

נבחר $\delta = min(\delta', 1)$. צריך להראות שלכל $x_1, x_2 \in [a,\infty)$ המקיימים $|x_1 - x_2| < \delta$ מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

אם $x_1, x_2 \in [a, A+1]$ אז סיימנו לפי (**).

אם $x_1, x_2 \in [A,\infty)$ אז סיימנו לפי (*).

נראה כי אלה הן שתי האפשרויות היחידות: אם שתי האפשרויות האלה לא מתקיימות אז בהכרח מתקיים בה"כ $x_1 \notin [\mathrm{A},\infty], x_2 \notin [a, A+1]$. כלומר מתקיים $x_1 < A$, $x_2 > A+1$, ולכן $x_2 - x_1 > A + 1 - A = 1$. זו סתירה כי מתקיים $|x_1 - x_2| < \delta \le 1$.