נכתב על ידי יהונתן רגב

### תזכורת

אם $p|a\cdot b$, ו $p-$ אי פריק, אזי: $p|a$ או $p|b$.

### משפט

לפולינומים במשתנה אחד מעל שדה, מתקיים פירוק יחיד. ז"א, אם:

$f=p_1\cdots p_m=q_1\cdots q_n$ כש - $p_1,\cdots,p_m$, $q_1,\cdots,q_n$ פולינומים אי פריקים, אזי $m=n$ ולכל $i$, $p_i=q_i$ (עד כדי כפל בקבוע ושינוי סדר של גורמים).

### הוכחה

- בעזרת אינדוקציה, ניתן להוכיח שאם $p|a_1\cdots a_n$, $p$ אי פריק, אז $p|a_1\vee\cdots\vee p|a_n$.
- את טענת המשפט נוכיח בערת אינדוקציה על מספר הגורמים.

<u>בסיס</u>: טריוויאלי.

<u>צעד</u>: נניח נכונות הטענה עבור $m$ גורמים, כלומר פירוק יחיד של: $f=p_1\cdots p_m$.

נוכיח נכונות הטענה עבור $(m+1)$ גורמים, כלומר פירוק יחיד של:

$$f=p_1\cdots p_m\cdot p_{m+1}=q_1\cdots q_n\cdot q_{n+1}.$$

נתבונן ב - $p_{m+1}$. זהו פולינום אי פריק, $p_{m+1}|f=q_1\cdots q_n\cdot q_{n+1}$. לכן, לפי הצעד הראשון של ההוכחה, $p_{m+1}$ מחלק לפחות אחד מהפולינומים $q_j$.

למשל, $p_{m+1}|q_{n+1}$. שניהם אי פריקים, לכן הם פרופורציונאליים, ז"א, עד כדי כפל בפולינום קבוע, מתקיים: $p_{m+1}=q_{n+1}$, לכן:

$$f=p_1\cdots p_m\cdot p_{m+1}=q_1\cdots q_n\cdot q_{n+1}.$$

אבל, בחוג $\mathcal{R}=\mathbb{F}[x]$, מתקיים חוק הצמום: אם $f,g,h\neq 0$, $f\cdot h=g\cdot h$, אזי $f=g$.

[נימוק: $f\cdot h=g\cdot h\to f\cdot h-g\cdot h=0\to(f-g)\cdot h=0\to f-g=0\to f=g$].

לאחר הצמצום ב - $p_{m+1}$, נקבל: $f=p_1\cdots p_m=q_1\cdots q_n$, ולפי הנחת האינדוקציה $p_i=q_j$ עד כדי שינוי סדר של גורמים וכפל בקבוע.

■

**הערה**

בעזרת פירוק יחיד, ניתן לנמק את הטענה הבאה: כל השורשים של הפולינום המינימלי של מטריצה $A$, הם הערכים העצמיים של $A$.

$m_A(x)|p_A(x)|[m_A(x)]^n$. $p_A(x) = (x-\lambda_1)^{k_1}\cdots(x-\lambda_s)^{k_s}$ (בהנחה שהפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים), ובשימוש בפירוק היחיד: $m_A(x) = (x-\lambda_1)^{d_1}\cdots(x-\lambda_s)^{d_s}$.

**הערה**

אם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, אי הפולינומים האי פריקים הם פולינומים לינאריים בלבד.

**הערה**

אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, אזי הפולינומים האי פריקים הם פולינומים לינאריים או פולינומים ריבועיים (ממעלה 2) בלבד.

**נימוק**

אם $f\in\mathbb{R}[x]$ ואם $\alpha\in\mathbb{C}, \alpha\notin\mathbb{R}$ שורש של $f$, אזי גם $\tilde{\alpha}$ הוא גם שורש של $f$.

**הערה**

אם $\mathbb{F}=\mathbb{Q}$ או $\mathbb{F}$ שדה סופי, אזי קיימים אינסוף פולינומים אי פריקים, ויש פולינומים אי פריקים ממעלה כלשהי.

# צורת ז'ורדן

**משפט (ז'ורדן)**

תהי $A_{n\times n}$ מטריצה ריבועית. נניח שהפולינום האופייני $p_A(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים. אזי $A$ דומה למטריצה $\mathcal{J}$ בצורה הבאה:

$$\mathcal{J}=\begin{pmatrix}\mathcal{J}_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathcal{J}_{n_t}(\lambda_t)\end{pmatrix}$$

. כשכל בלוק $\mathcal{J}_{\mathrm{n_i}}(\lambda_i)$ הוא תא ז'ורדן, כלומר:

$$\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i\end{pmatrix}_{n_i\times n_i}$$

($n_i\geq 1$, $\lambda_i$ לא בהכרח שונים אחד מהשני).

בנוסף, המטריצה $\mathcal{J}$ היא יחידה (עד כדי סדר של הבלוקים).

ל $-\mathcal{J}$ קוראים צורת ז'ורדן של $A$.

**משפט**

אם $T:V\to V$ אופרטור לינארי כך ש - $p_T(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים. אזי, קיים בסיס של $B$ כך שהמטריצה המייצגת $A=[T]_B$ היא מטריצת ז'ורדן $\mathcal{J}$. קוראים ל - $B$ בסיס מז'ירדן. $\mathcal{J}$ יחידה עד כדי שינוי סדר הבלוקים.

**מסקנה**

תהי $\mathcal{J}$ צורת הז'ודרן של מטריצה $A$. נניח ש $-p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים. נסמן $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ כל הערכים העצמיים השונים של $A$. אזי:

1. לכל $A_i$, הריבוי האלגברי שלו $k_i$ שווה לסכום הגדלים של כל הבלוקים המכילים את $\lambda_i$. [מזה נקבל: $p_A(x)=(x-\lambda_1)^{k_1}\cdots(x-\lambda_s)^{k_s}$].
2. לכל $A_i$, הריבוי הגיאומטרי שלו $m_i$ שווה למספר הבלוקים המכילים את $\lambda_i$.
3. לפולינום המינימלי $m_A(x)$ מתקיים: $m_A(x)=(x-\lambda_1)^{d_1}\cdots(x-\lambda_s)^{d_s}$, כש - $d_i$ הינו הגודל המקסימלי של הבלוק המכיל את $\lambda_i$.

### נימוק

$m_A(x) = m_J(x) = l.c.m(m_{n_1}(x), \cdots, m_{n_t}(x))$, ולכל בלוק ז׳ורדן $m_{J_{n_i}}(x) = (x-\lambda_i)^{n_i}$.

4. $A$ לכסינה אם ורק אם $m_A(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_s)$.

### דוגמה

נתבונן בשתי מטריצות $7 \times 7$.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1| \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda| \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda| \end{pmatrix}$$

$A' \not\approx A$, מיחידות צורת ז׳ורדן. מתקיים:

1. $p_A(x) = (x-\lambda)^7 = p_{A'}(x)$
2. $m_A(x) = (x-\lambda)^3 = m_{A'}(x)$
3. $k_\lambda = 7$.
4. $m_\lambda = 3$.