גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ו - תרגיל 1

3 במרץ 2016

1. כתבו בצורה מלאה את הסכומים הבאים הנתונים בסימון הסכימה של איינשטיין:

   (א) $a^i{}_j b^j{}_k c^k{}_l$.

   (ב) $a_{ij}v^iv^j$.

   (ג) $\delta_{ij}a^{ij}$.

   כאשר $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$.

2. תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו בעזרת סימון הסכימה של איינשטיין שמתקיים:

$$tr\,(AB) = tr\,(BA)$$

3. בעזרת סימון הסכימה של איינשטיין, הוכיחו שכפל מטריצות מקיים את תכונת הפילוג, דיסטריביוטיביות.
   כלומר, הראו שלכל $A, B, C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים:

$$A\,(B + C) = AB + AC, (A + B)\,C = AC + BC$$

4. תהי $\delta^i{}_j$ פונקציית דלתא של קרונקר, כאשר $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. חשבו את הביטוי $\delta^i{}_j \delta^j{}_k \delta^k{}_i$, הנתון בסימון הסכימה של איינשטיין.

5. נתונה מטריצה A מגודל 2×2. נסמן ב־T_1 את העקבה של A וב־T_2 את העקבה של A^2. ידוע שהפולינום האופייני של המטריצה A הוא:

$$p_A\,(x) = x^2 + ax + b$$

כאשר $a = -T_1, b = \frac{1}{2}\left(T_1^2 - T_2\right)$.

משפט קיילי המילטון קובע שכל מטריצה ריבועית מאפסת את הפולינום האופייני שלה,

קרי: $p_A(A) = 0$.

בטאו את משפט קיילי המילטון בעזרת הנוסחה $p_A(x) = x^2 + ax + b$.