תרגיל 3

להגשה בכ"ח חשוון (13.11) או א' כסליו (15.11) - כל אחד בקבוצת התרגול שלו.

1. הוכח[1] שחיבור מטריצה הוא אסוציאטיבית כלומר $(A+B)+C = A+(B+C)$ עבור מטריצות מאותו גודל.

פתרון:

$$[(A+B)+C]_{ij} = (A+B)_{ij} + C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} + C_{ij}$$
$$= A_{ij} + (B+C)_{ij} = [A+(B+C)]_{ij} \quad \blacksquare$$

2. נתונות 2 מטריצות $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(א) מצא את $(AB)_{11}, (AB)_{13}, (AB)_{22}$

פתרון: $(AB)_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 + 1\cdot 0 + 4\cdot 1 = 6$

$$(AB)_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 + 1\cdot 0 + 4\cdot 0 = 2$$

$$(AB)_{22} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 0 = -1$$

(ב) בעזרת כפל עמודה עמודה הצג את העמודה הראשונה של AB כסכום משוקלל של עמודות A [2].

פתרון:

$$C_1(AB) = AC_1(B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= 1\cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ג) בעזרת כפל שורה שורה הצג את השורה השניה של AB כסכום משוקלל של שורות B.

פתרון:

[1] גם אם לא מצויין במפורש α תמיד מייצג סקלאר, A, B מטריצות בכל התרגיל

[2] סכום משוקלל הוא $\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_n c_n$ כאשר c_i עמודות מטריצה ו α_i סקאלרים

$$R_2(AB) = R_2(A)B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} +$$
$$(-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ד) בעזרת כפל עמודה שורה פרק את AB לסכום של 3 מטריצות מגודל 2×3 וחשב את התוצאה הסופית AB.

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

הגדרה: בהנתן מטריצה A. החזקה של A מוגדרת להיות $A^n := \underbrace{AA \cdots A}_{n\, times}$

3. עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ חשב את את העמודה הראשונה של A^4.

פתרון:

$$C_1(A^4) = C_1(A^3A) = A^3 \cdot C_1(A) = A^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1(A^3) =$$
$$C_1(A^2A) = A^2 \cdot C_1(A) = A^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1(A^2) =$$
$$C_1(AA) = A \cdot C_1(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. יהיו מטריצות: A בגודל 3×3, B בגודל 5×4, Cבגודל 1×5; D בגודל 4×5 ו־ E בגודל 3×5 אלו מבין הפעולות הבאות מוגדרת? במידה והפעולה מוגדרת מה גודל המטריצה המתקבלת? (פתרון בסוגריים)

(א) BCB (לא מוגדר)

(ב) $B + D$ (לא מוגדר)

(ג) A^3E ($A^3E \in \mathbb{F}^{3\times5}$)

(ד) $A(E+E)D$ ($A(E+E)D \in \mathbb{F}^{3\times4}$)

(ה) ED ($ED \in \mathbb{F}^{3\times4}$)

(ו) BC ($BC \in \mathbb{F}^{4\times 1}$)

5. יהיו
$$E_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

הבן מה נותנת המכפלה $E_1A,\ E_2A,\ E_3A$ עבור מטריצה A כלשהיא וע"י כך חשב את $E_1^{10},\ E_2^{10},\ E_3^{10}$.[3]

פתרון: (בעזרת כפל שורה־שורה)

הכפל ב E_1 משמאל שקול לפעולת שורה אלמנטרית של הוספת פעמיים שורה ראשונה לשורה השניה

$$E_1A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-&R_1(A)&-\\-&R_2(A)&-\\-&R_3(A)&-\\-&R_4(A)&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-&R_1(A)&-\\-&R_2(A)+2\cdot R_1(A)&-\\-&R_3(A)&-\\-&R_4(A)&-\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2+2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2+2+2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{10}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\10\cdot 2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\20&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

הכפל ב E_2 משמאל שקול לפעולת שורה אלמנטרית של הכפלת השורה השלישית ב־3

---

[3] מספיק תשובה סופית ונימוק־ ללא חישוב מפורש.

$$E_2A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-&R_1(A)&-\\-&R_2(A)&-\\-&R_3(A)&-\\-&R_4(A)&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-&R_1(A)&-\\-&R_2(A)&-\\-3\cdot&R_3(A)&-\\-&R_4(A)&-\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3^2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3^3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{10}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3^{10}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

הכפל ב E_3 משמאל שקול לפעולת שורה אלמנטרית של החלפת שורות 1 ו־3

$$E_3A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-&R_1(A)&-\\-&R_2(A)&-\\-&R_3(A)&-\\-&R_4(A)&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-&R_3(A)&-\\-&R_2(A)&-\\-&R_1(A)&-\\-&R_4(A)&-\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=I_4$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{10}=\left[\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^2\right]^5=I_4^5=I_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

הגדרה: תהא Aמטריצה כלשהיא מגודל $m\times n$. המטריצה המשוחלפת של A היא המטריצה A^tבגודל $n\times m$ המוגדרת $(A^t)_{ij}:=(A)_{ji}$.

6. הוכח (בהנחה שהפעולות המופיעות בסעיפים מוגדרות):

(א) $(\alpha A)B=\alpha(AB)=A(\alpha B)$

פתרון: נניח $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F}),\ B\in M_{n\times p}(\mathbb{F})$

$$[(\alpha A)B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha A)_{ik}(B)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha(A)_{ik}(B)_{kj}$$
$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik}(B)_{kj} = \alpha(AB)_{ij} = [\alpha(AB)]_{ij}$$
$$[(\alpha A)B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha A)_{ik}(B)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha(A)_{ik}(B)_{kj}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik}\alpha(B)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik}(\alpha B)_{kj} = [A(\alpha B)]_{ij}$$

(ב) $(AB)^t = B^t A^t$

פתרון: נניח $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}),\ B \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$

$$\begin{aligned}[(AB)^t]_{ij} &= (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n}(A)_{jk}(B)_{ki} = \\ &\sum_{k=1}^{n}(A^t)_{kj}(B^t)_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(B^t)_{ik}(A^t)_{kj} = [B^t A^t]_{ij}\end{aligned}$$

(ג) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

פתרון: נניח $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$

$$[(\alpha A)^t]_{ij} = (\alpha A)_{ji} = \alpha(A)_{ji} = \alpha(A^t)_{ij} = [\alpha A^t]_{ij}$$

(ד) $AA^t,\ A^tA$ ־ תמיד מוגדר ותמיד מטריצות סימטריות.

פתרון: נניח $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$

$$A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}) \Rightarrow AA^t \in M_{m\times m}(\mathbb{F}),\ A^tA \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$$

בנוסף $(AA^t)^t \underset{(AB)^t=B^tA^t}{=} (A^t)^t A^t = AA^t \Leftarrow$ AA^t סימטרית

באופן דומה $(A^tA)^t \underset{(AB)^t=B^tA^t}{=} A^t(A^t)^t = A^tA \Leftarrow$ A^tA סימטרית.

(ה) עבור מטריצה ריבועית A־הוכח $A + A^t$ מטריצה סימטרית, $A - A^t$ מטריצה אנטי סימטרית.

פתרון: נניח $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$

$(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t \Leftarrow$ $A + A^t$ סימטרית.

$(A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t) \Leftarrow$ $A - A^t$ אנטי סימטרית.

(ו) $trace(A) = trace(A^t)$

פתרון: נניח $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$

$$tr(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{ii} = \sum_{k=1}^{n} (A^t)_{ii} = tr(A^t)$$

(ז) $trace(\alpha A) = \alpha \cdot trace(A)$

פתרון: נניח $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$

$$tr(\alpha A) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha A)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} \alpha(A)_{ii} = \alpha \sum_{k=1}^{n} (A)_{ii} = \alpha \cdot trace(A)$$

בהצלחה!