שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה דיפרנציאלית ואנליטית (88-201)
שם המרצה: פרופ' מיכאל כץ
סמסטר ב', מועד ב': 24.08.14

<u>יש לנמק ולהצדיק את כל התשובות.</u>

<u>משך הבחינה: שלוש שעות.</u>

1. יהי (e_1, e_2) הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$. יהי $C \subset \mathbb{R}^2$ עקומת Jordan קמורה חלקה עם פרמטריזציה $\alpha(s)$ במהירות יחידה. יהי $v(s)$ וקטור מהירות שלה. יהי $\theta(s)$ הזוית נמדד נגד כיוון השעון בין e_1 לבין $v(s)$.
   - א. תנו שתי הגדרות מפורטות של פונקצית עקמומיות $k_\alpha(s)$.
   - ב. הגדר עקמומיות גלובלית $Tot(C)$ של עקומה C.
   - ג. הוכח שעקמומיות גלובלית של C שווה 2π.
   - ד. לקבוע אם פונקצית עקמומיות של עקומה $2x^2 - 3y^2 = 1$ בנקודות (x, y) היא פונקציה קבועה, באמצעות אופרטור Bateman-Reiss.

2. יהי $M \subset \mathbb{R}^3$ משטח מוגדר על ידי גרף של $z = f(x, y)$ כאשר $f(x, y) = -6xy$. יהי (e_1, e_2, e_3) הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.
   - א. מצא מטריצת Hessian H_f של f בראשית הצירים.
   - ב. יהיו λ_i (כאשר $i = 1, 2$) ערכים עצמיים של H_f. יהי v_i וקטור עצמי במישור (x, y) השייך לערך עצמי λ_i. נגדיר מישור $P_i \subset \mathbb{R}^3$ $(i = 1, 2)$ הנפרש על ידי e_3 וגם הווקטור העצמי v_i. נגדיר עקומה $\gamma_i \subset \mathbb{R}^3$ על ידי $\gamma_i = M \cap P_i$. מצא את העקמומיות של כל אחת מן העקומות γ_i בראשית הצירים.
   - ג. חשב את העתקת Weingarten של M בראשית הצירים ואת עקמומיות Gauss של M בראשית הצירים.
   - ד. חשב את עקמומיות ממוצעת H של משטח M בראשית הצירים.

3. הביטויים הבאים משתמשים בסימון חיבור של Einstein. לבטא באמצעות מקדמים Γ_{ij}^{ℓ}, L_{ij}, וכו., ולפשט ככל האפשר את הביטויים הבאים:
   - א. לבטא באמצעות Γ_{ij}^{ℓ} ו- L_{ij} *בלבד*: $\delta^k{}_m \left\langle x_{ab}, n_k \right\rangle$.
   - ב. $\left\langle x_j, x_{pq} \right\rangle g^{jp}$.
   - ג. $\left\langle x_{pqr}, n \right\rangle$.
   - ד. $|x_{ij}|^2$.

4. בקואורדינטות $\left(u^1, u^2\right) = \left(x, y\right)$, נניח $h(x, y) = Cx$ כאשר $C > 0$ ונתבונן במטריקה מוגדרת על ידי נוסחה $h(x, y)^{-2}\left(dx^2 + dy^2\right)$
   - א. חשב את המקדמים Γ_{11}^1, Γ_{21}^1, Γ_{12}^1, Γ_{22}^1 של המטריקה.
   - ב. הגדר אופרטור Laplace-Beltrami Δ_{LB} של המטריקה ותן נוסחה לעקמומיות של Gauss באמצעות Δ_{LB}.
   - ג. בטא משוואה דיפרנציאלית של קו גאודזי של המטריקה.
   - ד. חשב את עקמומיות $K = K(x, y)$ של המטריקה.

5. השעלה הזאת עוסקת בדריבציות. יהי D_p מרחב של פונקציות גזירות $f(x,y,z)$ בסביבת נקודה $p\in\mathbb{R}^3$.

א. תנו הגדרה מפורטת של מושג של 1-תבנית על D_p .

ב. תנו הגדרה מפורטת של מושג של דריבציה בנקודה p .

ג. חשב עם הוכחה את מימד של מרחב הדריבציות כאשר $p=0\in\mathbb{R}^3$.

בהצלחה!