

תורת המשחקים - שיעור 6

משחקי סכום אפס, אסטרטגיות מעורבות

תזכורת: דוגמה למשחק סכום אפס

מצאו אסטרטגית מקסימין ואסטרטגית מינימקס עבור המשחק:

	A	B	C	D	MIN
T	8	4	8	4	4
M	2	5	3	8	2
B	6	1	4	5	1
MAX	8	5	8	8	$\underline{v} = 4 \quad \bar{v} = 5$

סיכון המשחק מהדוגמה

▶ אנחנו רואים:

◦ שחקן 1 יכול להבטיח לעצמו לפחות 4 (מקסמין).

◦ שחקן 2 יכול להבטיח ששחקן 1 יקבל לכל היותר 5 (מינמקס).

▶ כיוון שמתקיים $\underline{v} = 4 > \bar{v} = 5$ אנו אומרים שלמשחק אין ערך.

▶ הכוונה בכך שאין ערך למשחק אינה שלמשחק אין משמעות (או שאינו "טוב"), אלא שלמשחק בעל ערך יש מספר (הערך) שיש לו חשיבות מתימטית.

▶ למשחק ללא ערך יש גם "בעיות יציבות": לדוגמה במשחק הנ"ל שחקן 1 ייבחר באסטרטגיה T ושחקן 2 ייבחר באסטרטגיה B, ונקבל תשלום של 4. אך במקרה ששחקן 2 בוחר ב B שחקן 1 היה למעשה מעדיף לבחור דוקא ב M, ואז שחקן 2 היה משנה את דעתו בהתאם...

משחק עם ערך

▶ אם מתקיים $\underline{v} = \bar{v}$ נאמר ש- **למשחק יש ערך**
ו- $\underline{v} = \bar{v} = v$ נקרא ה- **ערך של המשחק**.

▶ במשחק בעל ערך וקטור אסטרטגיות (s_1, s_2) כך ש s_1 הוא מקסמין, ו- s_2 הוא מינמקס, נקרא **וקטור אסטרטגיות אופטימליות**.

▶ קל לראות כי $u(s_1, s_2) = v$. כלומר התשלום בוקטור האסטרטגיות האופטימליות הינו ערך המשחק.

במשחק בעל ערך יש נק' שיווי משקל

▶ **משפט 1:** במשחק סכום אפס בעל ערך, וקטור אסטרטגיות אופטימליות הוא נקודת שיווי משקל נאש.

▶ **הוכחה:** יהי $s = (s_1, s_2)$ וקטור אסטרטגיות אופטימליות.

▶ כיוון ש s_1 היא אסטרטגית מקסמין, הרי שכל בחירת אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ תביא לתשלום של לפחות v . כלומר

$$\forall t_2 \in S_2, \quad u(s_1, t_2) \geq v = u(s_1, s_2)$$

▶ ולכן

$$\forall t_2 \in S_2, \quad u_2(s_1, t_2) = -u(s_1, t_2) \leq -v = u_2(s_1, s_2)$$

▶ כמו כן

$$\forall t_1 \in S_1, \quad u(t_1, s_2) \leq v = u(s_1, s_2)$$

▶ לכן לאף שחקן אין אינטרס לזוז מהוקטור s , כלומר הוא שיווי משקל נאש.

▶ מש"ל

ולהיפך: משחק עם שיווי משקל הוא בעל ערך

▶ **משפט 2:** משחק סכום אפס בעל נק' שיווי משקל נאש הוא משחק בעל ערך, ונק' שיווי המשקל הינה וקטור אסטרטגיות אופטימליות.

▶ **הוכחה:** נסמן ב $s = (s_1, s_2)$ את נק' שיווי המשקל.

▶ נסמן $v = u(s_1, s_2)$.

▶ לפי הגדרת שיווי משקל

$$\forall t_2 \in S_2, \quad u(s_1, t_2) \geq u(s_1, s_2) = v$$

$$\forall t_1 \in S_1, \quad u(t_1, s_2) \leq u(s_1, s_2) = v$$

▶ לכן $\min_{t_2 \in S_2} u(s_1, t_2) = v$ ולכן $\underline{v} \leq v$.

▶ באופן דומה $\max_{t_1 \in S_1} u(t_1, s_2) = v$ ולכן $v \geq \bar{v}$, וביחד $\underline{v} \geq \bar{v}$.

▶ אבל תמיד $\bar{v} \leq \underline{v}$ ולכן $\underline{v} = \bar{v}$.

▶ שימו לב כי s_1 הינה אסטרטגית מקסמין, ו s_2 הינה מינמקס.

דוגמה: משחק סכום אפס רציף

▶ קבוצת האסטרטגיות של שני השחקנים היא $S_i = [0,1]$.

▶ פונקציית התועלת של המשחק היא

$$u(x, y) = 4xy - 2x - y + 3$$

▶ נחשב תחילה את ערך המקסמין \underline{v} :

$$\underline{v} = \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} u(x, y)$$

$$\min_{y \in [0,1]} u(x, y) = \min_{y \in [0,1]} ((4x - 1)y - 2x + 3)$$

▶ לכל בחירה של x נקבל פונקציה לינארית ב y , והמינימום נקבע ע"י נקודות השפה בהתאם לשיפוע.

המשך

▶ השיפוע הוא $4x - 1$ ולכן הוא שלילי כאשר $x \in [0, \frac{1}{4})$,

וחיובי כאשר $x \in (\frac{1}{4}, 1]$

▶ המינימום עבור $x \in [0, \frac{1}{4})$ מתקבל כאשר $y = 1$ וערכו הוא

$$u(x, 1) = 4x - 1 - 2x + 3 = 2x + 2$$

▶ המינימום עבור $x \in (\frac{1}{4}, 1]$ מתקבל כאשר $y = 0$

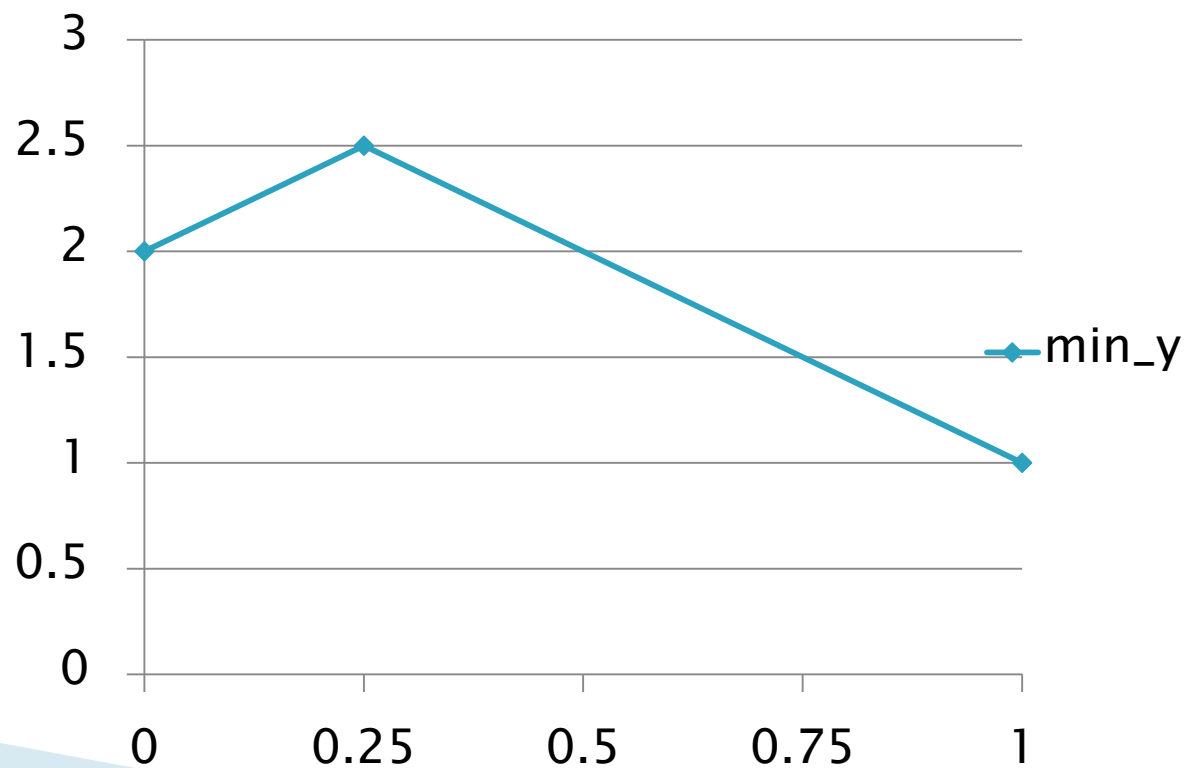
$$u(x, 0) = -2x + 3$$

▶ כאשר $x = \frac{1}{4}$ נקבל 2.5 $u(\frac{1}{4}, y) = y - \frac{2}{4} - y + 3 = 2.5$

המשך

$$\min_{y \in [0,1]} u(x, y) = \begin{cases} 2x + 2 & x \leq \frac{1}{4} \\ -2x + 3 & x > \frac{1}{4} \end{cases}$$

סה"כ נקבל ▶



המשך

לכן: ▶

$$\underline{v} = \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} u(x, y) = 2.5$$

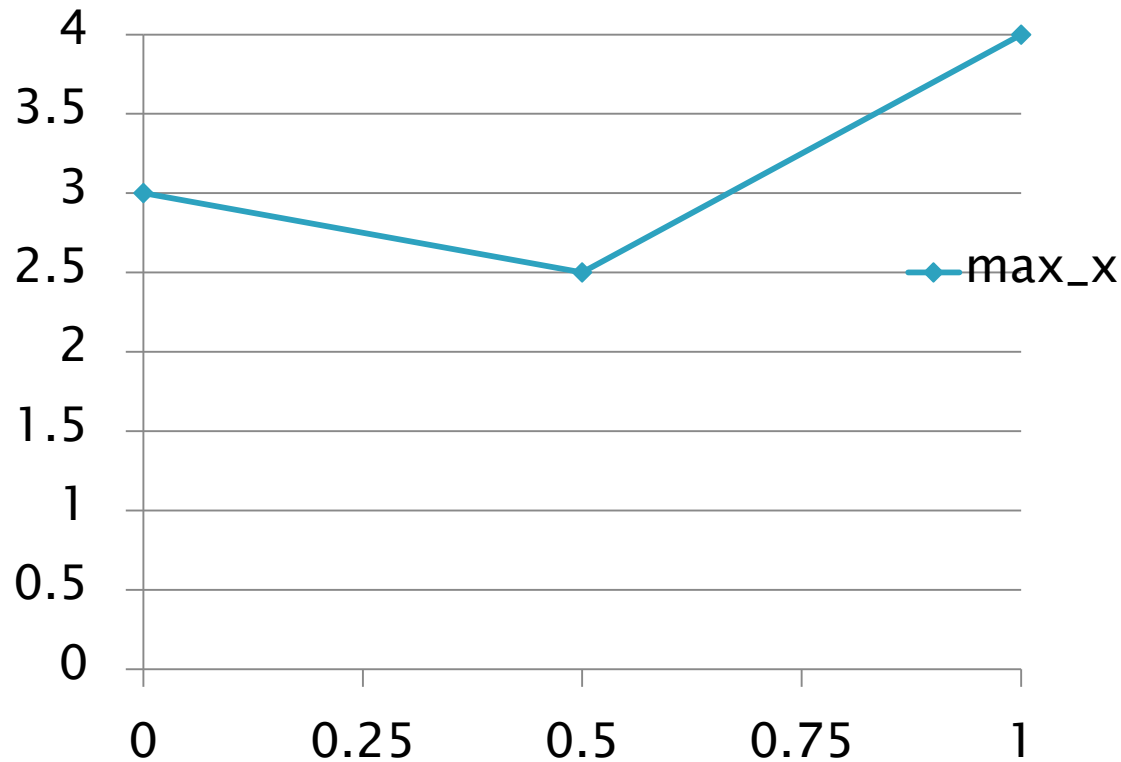
ומתקיים ש- $x = \frac{1}{4}$ היא אסטרטגית המקסמין של שחקן 1.

כעת צריך לחשב את ▶

$$\bar{v} = \min_{y \in [0,1]} \max_{x \in [0,1]} u(x, y)$$

$$\max_{x \in [0,1]} u(x, y) = \begin{cases} -y + 3 & y \leq \frac{1}{2} \\ 3y + 1 & y > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{באופן דומה מקבלים: ▶}$$

המשך



נקבל $\bar{v} = \min_{y \in [0,1]} \max_{x \in [0,1]} u(x, y) = 2.5$ ▶
ואסטרטגית המינמקס של שחקן 2 היא $y = \frac{1}{2}$.

המשך - סיכום

▶ קיבלנו שלמשחק יש ערך והוא 2.5.

▶ וקטור האסטרטגיות האופטימליות הוא $s = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

▶ יש שיווי משקל נאש יחיד במשחק והוא: $s = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

אסטרטגיות מעורבות - הקדמה

- ▶ מה קורה אם אחד השחקנים מחליט שבמקום לבחור בעצמו אסטרטגיה הוא יטיל מטבע, ונפילת המטבע תקבע את בחירתו?
- ▶ ניתן להסתכל על הטלת מטבע זו כבחירת אסטרטגיה (שונה מהאסטרטגיות הנתונות).

משחק זוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

נזכר במטריצת המשחק: ▶

שחקן 2

		H	T	MIN
שחקן 1	H	1	-1	-1
	T	-1	1	-1
MAX		1	1	$\underline{v} = -1 \quad \bar{v} = 1$

אסטרטגיות מעורבות - הקדמה

- ▶ ניתן לכתוב אסטרטגיה מעורבת כך: $\left[\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}T\right]$ -- יש הסתברות $\frac{1}{2}$ לבחירת זוג והסתברות $\frac{1}{2}$ לקבלת פרט.
- ▶ לדוגמה שחקן 1 כעת בעל אסטרטגיות $\left\{H, T, \left[\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}T\right]\right\}$ ושחקן 2 נשאר עם אסטרטגיות $\{H, T\}$.
- ▶ אבל איך מגדירים את התשלום $u\left(\left[\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}T\right], H\right) = ???$
- ▶ אנחנו לא יודעים מראש מה תהיה תוצאת המשחק, ולכן לא ניתן לקבוע מה יהיה התשלום.

אסטרטגיות מעורבות - הקדמה

▶ פתרון אפשרי לבעיה זו היא בחירת **התוחלת** של התשלומים כתשלום לאסטרטגיה "המעורבת" $:\left[\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}T\right]$

$$u\left(\left[\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}T\right], H\right) = \frac{1}{2}u(H, H) + \frac{1}{2}u(T, H) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

▶ לבחירה זאת יש תכונות נוחות מאד, נשים לב שפונקציית התשלום פועלת באופן לינארי על האסטרטגיה המעורבת.

משחק זוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

נוסיף את האסטרטגיות המעורבות: ▶

שחקן 2

		H	$\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}T$	T	MIN
		שחקן 1	H	1	0
$\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}T$	0		0	0	0
T	-1		0	1	-1
MAX		1	0	1	$\underline{v} = 0 \quad \bar{v} = 0$

משחק זוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

▶ ראינו שהוספת אסטרטגיה מעורבת $\left[\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}T\right]$ למעשה פתרה את המשחק.

▶ כעת יש לנו ערך למשחק וגם שיווי משקל נאש יחיד.

▶ אם שני השחקנים יתאמו ששניהם יטילו מטבעות, אזי לאף אחד מהם לא יהיה מניע לשנות את האסטרטגיה שלו.

▶ דוגמה זו ממחישה באופן טוב מאד מדוע כדאי לשקול הוספת אסטרטגיות מעורבות למשחקים.

▶ אבל מדוע להסתפק בהוספת אסטרטגיה אחת? ניתן להוסיף רצף של אסטרטגיות מעורבות מהצורה $[pH, (1-p)T]$.

▶ לדוגמה: $H = [1H, 0T], T = [0H, 1T]$

משחק זוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

▶ הפכנו את המשחק הסופי למשחק סכום אפס רציף, עם פונקצית התועלת הבאה:

$$\begin{aligned} u([pH, (1-p)T], [qH, (1-q)T]) &= \\ &= pu(H, [qH, (1-q)T]) + (1-p)u(T, [qH, (1-q)T]) = \\ &= pq u(H, H) + p(1-q)u(H, T) + \\ &\quad + (1-p)qu(T, H) + (1-p)(1-q)u(T, T) = \\ &= pq - p(1-q) - (1-p)q + (1-p)(1-q) = \\ &= 4pq - 2p - 2q + 1 \end{aligned}$$

משחק זוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

▶ למעשה בחירת אסטרטגיה שקולה לבחירת מספר בקטע $[0,1]$.

▶ לכן ניתן לכתוב בקיצור $u(p,q) = 4pq - 2p - 2q + 1$.

▶ כעת נמצא את ערכי המקסמין והמינימקס של המשחק.

$$\min_{q \in [0,1]} u(p,q) = \min_{q \in [0,1]} ((4p - 2)q - 2p + 1)$$

▶ השיפוע של $u(p,q)$ כפונקציה של q הוא $4p - 2$ ולכן

$$p = \frac{1}{2}$$

השיפוע מחליף סימן ב

משחק זוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

$$\min_{q \in [0,1]} u(p, q) = \begin{cases} u(p, 1) & p \leq \frac{1}{2} \\ u(p, 0) & p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

ערך המקסמין
מתקבל
באסטרטגיה
של שחקן 1
 $p = \frac{1}{2}$

$$= \begin{cases} 2p - 1 & p \leq \frac{1}{2} \\ 1 - 2p & p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\underline{v} = \max_{p \in [0,1]} \min_{q \in [0,1]} u(p, q) = 0$$

משחק זוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

▶ בצורה דומה מראים

$$\bar{v} = \min_{q \in [0,1]} \max_{p \in [0,1]} u(p, q) = 0$$

▶ ערך המקסמין מתקבל באסטרטגיה $q = \frac{1}{2}$ של שחקן 2.

▶ אם כך יש למשחק ערך והוא $v = 0$ והוא מתקבל באסטרטגיה $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

▶ אסטרטגיה זו היא שיווי משקל נאש (היחיד במשחק).

▶ תרגיל בית: מצאו את שיווי משקל נאש בעזרת פונקציות BR כפי שעשינו בשיעור 4.

הוספת אסטרטגיות מעורבות

▶ יהי G משחק בו לשחקן i יש מספר סופי של אסטרטגיות:

$$S_i = \{x_1, \dots, x_n\}$$

▶ נוסיף לשחקן i אסטרטגיות באופן הבא:

◦ נבחר n הסתברויות $p_1, \dots, p_n \in [0, 1]$ כך ש

$$p_1 + \dots + p_n = 1$$

◦ נוסיף את האסטרטגיה המעורבת $[p_1 x_1, \dots, p_n x_n]$.

המשפטים של תורת המשחקים

▶ **משפט נאש**: יהי G משחק סופי עם מספר סופי של אסטרטגיות, ויהי G' המשחק המתקבל לאחר הוספת אסטרטגיות מעורבות (לכל השחקנים), אזי ב G' קיים שיווי משקל נאש.

▶ **משפט המינימקס (פון-נוימן)**: יהי G משחק סכום אפס, ויהי G' המשחק המתקבל לאחר הוספת אסטרטגיות מעורבות, אזי מתקיים

$$\max_{p_1} \min_{p_2} u(x_1, x_2) = \min_{p_2} \max_{p_1} u(x_1, x_2)$$

◦ כלומר למשחק G' יש ערך.

▶ משפט המינימקס הוא מסקנה של משפט נאש, מדוע?

ניתוח משחק

zero sum political game – מילטון פרידמן ▶

<http://www.youtube.com/watch?v=OoSzrgMNx8s> ▶

האם המשחקים שמילטון פרידמן מציג הם אכן משחקי סכום אפס? ▶