משפט ון־קפמן

X מ"ט, $U,V\subseteq X$ פתוחות, $U\cup V=X$, $U\cap V$ לא ריק וקשיר מסילתית.
מבחר $a\in U\cup V$. הדיאגרמה של ההכלות

$$\begin{tikzcd}
 & (U,a) \arrow[dr, "k"] & \\
(U\cap V,a) \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & (X,a) \\
 & (V,a) \arrow[ur, "l"'] &
\end{tikzcd}$$

משרה דיאגרמה של חבורות

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1\left(U,a\right) \arrow[dr] \arrow[rrd, "k_*"] & & \\
\pi_1\left(U\cap V,a\right) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[dr, "j_*"'] & & \pi_1\left(U,a\right)*\pi_1\left(V,a\right) \arrow[r, "L"] & \pi_1\left(X,a\right) \\
 & \pi_1\left(V,a\right) \arrow[ur] \arrow[rru, "l_*"'] & &
\end{tikzcd}$$

אזי L הוא איזומורפיזם.

הוכחה

בהינתן $\varphi:I\to X$, נביט בכיסוי הפתוח $\varphi^{-1}\left(U\right),\varphi^{-1}\left(V\right)$ של I.
I מרחב מטרי קומפקטי, לכן יש N מספיק גדול כך שאם נחלק את I לקטעים שווים $I_1=\left[0,\frac{1}{N}\right],I_2=\left[\frac{1}{N},\frac{2}{N}\right],\ldots I_N=\left[\frac{N-1}{N},1\right]$, אז לכל $1\leq i\leq N$ יתקיים $I_i\subseteq\varphi^{-1}\left(U\right)$ או $I_i\subseteq\varphi^{-1}\left(V\right)$, כלומר $\varphi\left(I_i\right)\subseteq U$ או $\varphi\left(I_i\right)\subseteq V$.
בחירת מסילות שתשרת אותנו גם בהוכחת החח"ע: לכל $p\in X$ נבחר אחת ולתמיד מסילה γ_p מa לp כך ש:

- אם $p\in U$, γ_p מסילה בU
- אם $p\in V$, γ_p מסילה בV
- אם $p\in U\cap V$, γ_p מסילה ב$U\cap V$
- אם $p=a$, $\gamma_p=k_a$

אנו מניחים בה"כ שגם U,V קשירים מסילתית. (נקבל תרגיל שיפרש את "בה"כ")

סימון: אם γ מסילה בX מנקודה p לנקודה q, נסמן $\hat{\gamma}=\gamma_p\cdot\gamma\cdot\overline{\gamma}_q$.

נחזור להוכחת על: יש לנו מסילות (פתוחות - כלומר לא לולאות) $\varphi|_{I_1},\varphi|_{I_2},\dots\varphi|_{I_N}$ שהשרשור שלהן הוא φ. נסמן אותן ב$\varphi_1,\varphi_2,\dots\varphi_N$. אזי לכל i $\hat{\varphi}_i$ הוא איבר ב$\pi_1(U,a)$ או $\pi_1(V,a)$, וגם מתקיים $\varphi=\hat{\varphi}_1\cdot\hat{\varphi}_2\cdots\hat{\varphi}_N$.

נשאר להוכיח חח"ע.

נבחר הומוטופיה $H:I\times I\to X$. $H^{-1}(U),H^{-1}(V)$ כיסוי פתוח של $I\times I$ שהוא מרחב מטרי קומפקטי. לכן יש N מספיק גדול כך שאם נחלק את $I\times I$ לריבועים בגודל $\frac{1}{N}\times\frac{1}{N}$ כך שלכל ריבוע קטן $\blacksquare$ מתקיים $H(\blacksquare)\subseteq U$ או $H(\blacksquare)\subseteq V$.

ע"י לקיחת N גדול יותר שמתחל במספר האותיות במילה שלנו, אפשר להניח(בה"כ) שמספר האותיות שווה לN.

כשעוברים בין קוביות ששתיהן מU, $k_a\cdot\gamma_1=\hat{\alpha}\cdot\hat{\beta}$ שוויון ב$\pi_1(U)$. כשעוברים מU לV

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(U) \arrow[dr, "k"] & \\ \pi_1(U\cap V) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[dr, "j_*"'] & & U \\ & \pi_1(V) \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

דוגמאות

- אם $\pi_1(U\cap V)=1$ אז $\pi_1(X)=\pi_1(U)*\pi_1(V)$.
- אם X הוא מרחב 8, וU,V הן שתי העיגולים, כאשר לכל עיגול נספח קשת מהעיגול השני שנקודת החיבור נמצאת עליה(אבל לא באחד הקצוות), אז $U\cap V$ כוויץ ולכן $\pi_1(\bigcirc)*\pi_1(\bigcirc)=\pi_1(\infty)$[1] וזה שווה ל

$$=F_1*F_1=F_2$$

$$F_2=\langle x,y|\rangle$$

$$xy\neq yx$$

הוכחה שניה שF_2 לא אבלית

ניקח G כלשהי שאינה אבלית, ונניח $g,h\in G$ מקיימים $gh\neq hg$. קיים הומומורפיזם $\varphi:F_2\to G$ כך ש $\begin{matrix}\varphi(x)=g\\ \varphi(y)=h\end{matrix}$.

- אם S^1 הוא מעגל, ומדביקים אותו בנקודה לS^2 - מה החבורה היסודית של זה?

[1] ∞ הוא מרחב השמונה, ו$\bigcirc$ הם העיגולים

פתרון תרגילי בית

תרגיל 3 שאלה 1

יהי X קשיר מסילתית, $a, b \in X$.
הראו ש$\pi_1(X,a)$ אבלית $\iff$ לכל שתי מסילות γ, δ מa לb $F_\gamma = F_\delta$.

פתרון

$\Longleftarrow$
$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[loop below, "\alpha"] \arrow[r, bend left, "\gamma"] \arrow[r, bend right, "\delta"'] & b \end{tikzcd}$$
יהיו $X \to I : \gamma, \delta$ מa לb. $[\beta] := \left[\gamma * \overline{\delta}\right] \Longleftarrow [\beta] \in$
$\pi_1(X,a)$. לכל $[\alpha] \in \pi_1$

$$[\gamma] \cdot \left[\overline{\delta}\right] [\alpha] = [\beta][\alpha] = [\alpha][\beta] = [\alpha][\gamma]\left[\overline{\delta}\right]$$

$$F_\gamma([\alpha]) = \left[\overline{\delta}\right][\alpha][\delta] = [\overline{\gamma}][\alpha][\gamma] = F_\gamma([\alpha])$$

$\Longrightarrow$
$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop above, "\varphi"] \arrow[loop below, "\psi"] \arrow[r, "l"] & b \end{tikzcd}$$
יהיו $[\varphi], [\psi] \in \pi_1(X,a)$. X קשיר מסילתית $\Longleftarrow$

$$\Longrightarrow \exists_{l:I\to X} l(0) = a, l(1) = b$$

$\varphi * l, \psi * l$ מa לb, ומהנתון $F_{\psi * l} = F_{\varphi * l}$.

$$F_{\psi * l}[\psi] = F_{\varphi * l}[\psi]$$

$$\left[\overline{\psi * l}\right][\psi][\psi * l] = \left[\overline{\varphi * l}\right][\psi][\varphi * l]$$

$$\cancel{\left[\overline{l}\right]}\left[\overline{\psi}\right][\psi][\psi]\cancel{[l]} = \cancel{\left[\overline{l}\right]}[\overline{\varphi}][\psi][\varphi]\cancel{[l]}$$

$$[\psi] = [\overline{\varphi}][\psi][\varphi]$$

$$[\varphi][\psi] = [\psi][\varphi]$$

תרגיל 5 שאלה 3

צריך למצוא את החבורה היסודית של הדיסק בלי נקודה, פעם אחת כשהנקודה בפנים של הדיסק ופעם אחת כשהיא בשפה.

פתרון

כאשר הנקודה שמוציאים בשפה, הדיסק בלי הנקודה הוא כוויץ, ולכן החבורה היסודית שלו טריוויאלית.

כאשר הנקודה שמוציאים היא בפנים הדיסק, אז המרחב לא כוויץ, אבל אפשר להראות שהמעגל הוא נסג עיוותי של המרחב הזה, ולכן החבורה היסודית של המרחב הזה שווה לחבורה היסודית של המעגל - שהיא $\mathbb{Z}$.

תרגיל 5 שאלה 4

להראות שאם יש הומאומורפיזם בין שני דיסקים אז הוא מעביר את השפה של דיסק אחד לשפה של הדיסק השני.

פתרון

אם אותו הומאומורפיזם היה מעתיק שפה לפנים, אז אם היינו מוציעים נקודה על השפה מהדיסק הראשון היינו מקבלים הומאומורפיזם $f : D^2 \setminus \{x\} \to D^2 \setminus \{f(x)\}$ היינו מקבלים שהחבורות היסודיות אמורות להיות שוות - אבל לפי שאלה 3 זה לא יכול להיות.

תרגיל 6 שאלה 3

צריך להוכיח ש$\mathrm{Ab}(G * H) \cong \mathrm{Ab}(G) \times \mathrm{Ab}(H)$.

פתרון

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Ab}(G) \\
K \arrow[r, "L"] \arrow[urr, "\alpha"] \arrow[drr, "\beta"'] & U \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
 & & \mathrm{Ab}(H)
\end{tikzcd}$$

$G \to G * H \to \mathrm{Ab}(G * H)$, אבל $G \to \mathrm{Ab}(G)$, ולכן קיים גם הומומורפיזם $\mathrm{Ab}(G) \to \mathrm{Ab}(G * H)$.

הערה: בעצם הראנו שהאבליזציה היא פנקטור:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & H \arrow[d] \\
\mathrm{Ab}(G) \arrow[r, "\hat{\varphi}"'] & \mathrm{Ab}(H)
\end{tikzcd}$$

הראנו שקיימים $\begin{matrix} g:\mathrm{Ab}\left(G\right)\to\mathrm{Ab}\left(G*H\right)\\ h:\mathrm{Ab}\left(H\right)\to\mathrm{Ab}\left(G*H\right)\end{matrix}$. נגדיר $L\left(k\right)=g\left(k\right)*h\left(k\right)$. נוכיח שזה הומומורפיזם: צ"ל $L\left(k_1k_2\right)=L\left(k_1\right)L\left(k_2\right)$:

$$L\left(k_1k_2\right)=g\left(\alpha\left(k_1k_2\right)\right)h\left(\beta\left(k_1k_2\right)\right)=$$

$$=g\left(\alpha\left(k_1\right)\alpha\left(k_2\right)\right)h\left(\left(\beta\left(k_1\right)\beta\left(k_2\right)\right)\right)=$$

$$=g\left(\alpha\left(k_1\right)\right)g\left(\varphi\left(k_2\right)\right)h\left(\beta\left(k_1\right)\right)h\left(\beta\left(k_2\right)\right)=$$

$$=g\left(\alpha\left(k_1\right)\right)h\left(\beta\left(k_1\right)\right)g\left(\varphi\left(k_2\right)\right)h\left(\beta\left(k_2\right)\right)=L\left(k_1\right)L\left(k_2\right)$$

ההומומורפיזם $G*H\to G$ מוגדר ע"י מכפלה בין הומומורפיזם הזהות מG והומומורפיזם הטריוויאלי מH:

$$\begin{tikzcd}
 & & G \\
G \arrow[r] \arrow[urr, bend left, "\mathrm{Id}_G"] & G*H \arrow[ur, "L"'] & \\
 & H \arrow[u] \arrow[uur, bend right, "1"'] &
\end{tikzcd}$$

עכשיו, נוכיח שזה יחיד:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\alpha_1"] \arrow[dr] & & \mathrm{Ab}\left(G\right) \arrow[dr] & \\
 & G*H \arrow[ur, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\varphi_2"] & & \mathrm{Ab}\left(G\right)\times\mathrm{Ab}\left(H\right) \\
H \arrow[rr, "\alpha_2"'] \arrow[ur] & & \mathrm{Ab}\left(H\right) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

וצריך לסיים את זה...

פתרון אחר(של המרצה)

לפי התכונות האוניברסליות מקבלים:

$$\mathrm{Ab}\left(G*H\right)\longrightarrow\mathrm{Ab}\left(G\right)\times\mathrm{Ab}\left(H\right)$$

אבל יש הומומורפיזמים טבעיים $\begin{matrix}\alpha:\mathrm{Ab}\left(G\right)\to\mathrm{Ab}\left(G*H\right)\\ \beta:\mathrm{Ab}\left(H\right)\to\mathrm{Ab}\left(G*H\right)\end{matrix}$. לכן נבחר $\varphi\left(xy\right)=\alpha\left(x\right)\beta\left(y\right)$ - שבד"כ זה לא הומומורפיזם, אבל הפעם זה כן בגלל שהדיאגרמה מתחלפת.