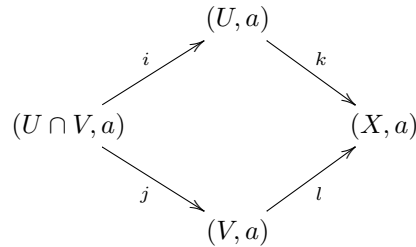
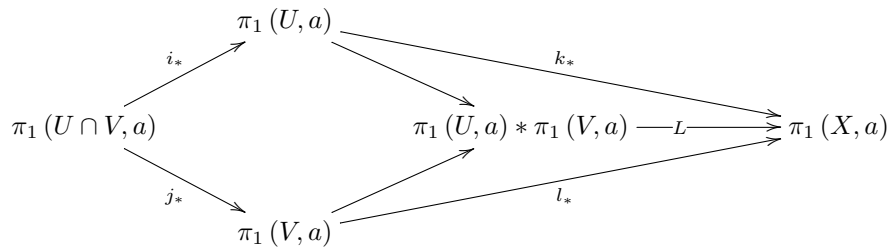


משפט ון-קפמן

X מ"ט, $U, V \subseteq X$ פתוחות, $U \cup V = X, U \cap V$ לא ריק וקשיר מסילתית. מבחר $a \in U \cup V$. הדיאגרמה של ההכלות



משרה דיאגרמה של חבורות



אזי L הוא איזומורפיזם.

הוכחה

בהינתן $\varphi: I \rightarrow X$, נביט בכיסוי הפתוח $\varphi^{-1}(U), \varphi^{-1}(V)$ של I . I מרחב מטרי קומפקטי, לכן יש N מספיק גדול כך שאם נחלק את I לקטעים שווים $I_i \subseteq I$ $1 \leq i \leq N$ אז לכל $I_i = [0, \frac{1}{N}]$, $I_2 = [\frac{1}{N}, \frac{2}{N}]$, \dots , $I_N = [\frac{N-1}{N}, 1]$ $\varphi(I_i) \subseteq V$ או $\varphi(I_i) \subseteq U$ כלומר $I_i \subseteq \varphi^{-1}(V)$ או $\varphi^{-1}(U)$. בחירת מסילות שתשרת אותנו גם בהוכחת החח"ע: לכל $p \in X$ נבחר אחת ולתמיד מסילה γ_p מא p כך ש:

- אם $p \in U$, γ_p מסילה ב U
- אם $p \in V$, γ_p מסילה ב V
- אם $p \in U \cap V$, γ_p מסילה ב $U \cap V$
- אם $p = a$, $\gamma_p = k_a$

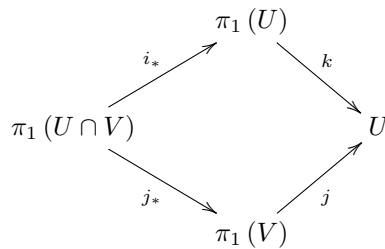
אנו מניחים בה"כ שגם U, V קשירים מסילתית. (נקבל תרגיל שיפרש את "בה"כ")

סימון: אם γ מסילה ב X מנקודה p לנקודה q , נסמן $\bar{\gamma}_q = \gamma \cdot \gamma_p$.

נחזור להוכחת על: יש לנו מסילות (פתוחות - כלומר לא לולאות) $\varphi|_{I_1}, \varphi|_{I_2}, \dots, \varphi|_{I_N}$ שהשרשור שלהן הוא φ . נסמן אותן ב $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$. אזי לכל i הוא איבר ב $\pi_1(U, a)$ או $\pi_1(V, a)$, וגם מתקיים $\hat{\varphi}_1 \cdot \hat{\varphi}_2 \cdots \hat{\varphi}_N = \varphi$.
 נשאר להוכיח חח"ע.

נבחר הומוטופיה $H : I \times I \rightarrow X$. $H^{-1}(U), H^{-1}(V)$ כיסוי פתוח של $I \times I$ שהוא מרחב מטרי קומפקטי. לכן יש N מספיק גדול כך שאם נחלק את $I \times I$ לריבועים בגודל $\frac{1}{N} \times \frac{1}{N}$ כך שלכל ריבוע קטן \blacksquare מתקיים $H(\blacksquare) \subseteq U$ או $H(\blacksquare) \subseteq V$.
 ע"י לקיחת N גדול יותר שמתחל במספר האותיות במילה שלנו, אפשר להניח(בה"כ) שמספר האותיות שווה ל N .

כשעוברים בין קוביות ששתיהן מ $U, \hat{\alpha} \cdot \hat{\beta} = k_a \cdot \gamma_1$ שוויון ב $\pi_1(U)$. כשעוברים מ U ל V



דוגמאות

- אם $\pi_1(U \cap V) = 1$ אז $\pi_1(U) * \pi_1(V) = \pi_1(X)$.
- אם X הוא מרחב 8 , U, V הן שתי העיגולים, כאשר לכל עיגול נספח קשת מהעיגול השני שנקודת החיבור נמצאת עליה(אבל לא באחד הקצוות), אז $U \cap V$ כוויץ ולכן $\pi_1(\infty) = \pi_1(\bigcirc) * \pi_1(\bigcirc)$ וזה שווה ל

$$= F_1 * F_1 = F_2$$

$$F_2 = \langle x, y | \rangle$$

$$xy \neq yx$$

הוכחה שניה ש F_2 לא אבלית

ניקח G כלשהי שאינה אבלית, ונניח $g, h \in G$ מקיימים $gh \neq hg$. קיים הומומורפיזם

$$\varphi : F_2 \rightarrow G$$

כך ש $\varphi(x) = g$
 $\varphi(y) = h$

- אם S^1 הוא מעגל, ומדביקים אותו בנקודה ל S^2 - מה החבורה היסודית של זה?

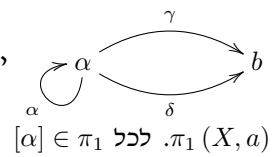
∞^1 הוא מרחב השמונה, ו \bigcirc הם העיגולים

פתרון תרגילי בית

תרגיל 3 שאלה 1

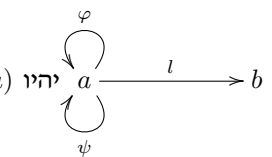
יהי X קשיר מסילתית, $a, b \in X$. הראו ש $\pi_1(X, a)$ אבליית \iff לכל שתי מסילות γ, δ מא a ל b $F_\gamma = F_\delta$.

פתרון

\iff יהיו $\gamma, \delta : I \rightarrow X$ מא a ל b . $[\beta] \in \iff [\beta] := [\gamma * \delta]$ \iff  \iff $[\alpha] \in \pi_1(X, a)$ לכל $[\alpha] \in \pi_1(X, a)$.

$$[\gamma] \cdot [\delta] [\alpha] = [\beta] [\alpha] = [\alpha] [\beta] = [\alpha] [\gamma] [\delta]$$

$$F_\gamma([\alpha]) = [\delta] [\alpha] [\delta] = [\bar{\gamma}] [\alpha] [\gamma] = F_\gamma([\alpha])$$

\implies  \implies יהיו $[\varphi], [\psi] \in \pi_1(X, a)$. X קשיר מסילתית \iff

$$\implies \exists l : I \rightarrow X \text{ } l(0) = a, l(1) = b$$

$$F_{\psi * l} = F_{\varphi * l} \text{ ומהנתון } l, \text{ מא } a \text{ ל } b, \text{ ומהנתון } F_{\psi * l} = F_{\varphi * l}$$

$$F_{\psi * l} [\psi] = F_{\varphi * l} [\psi]$$

$$[\psi * l] [\psi] [\psi * l] = [\varphi * l] [\psi] [\varphi * l]$$

$$\cancel{[\psi]} [\psi] [\psi] \cancel{[\psi]} = \cancel{[\varphi]} [\psi] [\varphi] \cancel{[\varphi]}$$

$$[\psi] = [\varphi] [\psi] [\varphi]$$

$$[\varphi] [\psi] = [\psi] [\varphi]$$

תרגיל 5 שאלה 3

צריך למצוא את החבורה היסודית של הדיסק בלי נקודה, פעם אחת כשהנקודה בפנים של הדיסק ופעם אחת כשהיא בשפה.

פתרון

כאשר הנקודה שמוציאים בשפה, הדיסק בלי הנקודה הוא כוויץ, ולכן החבורה היסודית שלו טריוויאלית.

כאשר הנקודה שמוציאים היא בפנים הדיסק, אז המרחב לא כוויץ, אבל אפשר להראות שהמעגל הוא נסג עיוותי של המרחב הזה, ולכן החבורה היסודית של המרחב הזה שווה לחבורה היסודית של המעגל - שהיא \mathbb{Z} .

תרגיל 5 שאלה 4

להראות שאם יש הומאומורפיזם בין שני דיסקים אז הוא מעביר את השפה של דיסק אחד לשפה של הדיסק השני.

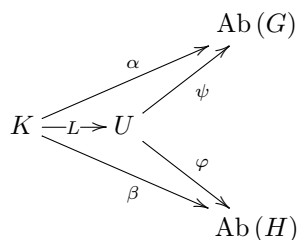
פתרון

אם אותו הומאומורפיזם היה מעתיק שפה לפנים, אז אם היינו מוציעים נקודה על השפה מהדיסק הראשון היינו מקבלים הומאומורפיזם $f : D^2 \setminus \{x\} \rightarrow D^2 \setminus \{f(x)\}$ היינו מקבלים שהחבורות היסודיות אמורות להיות שוות - אבל לפי שאלה 3 זה לא יכול להיות.

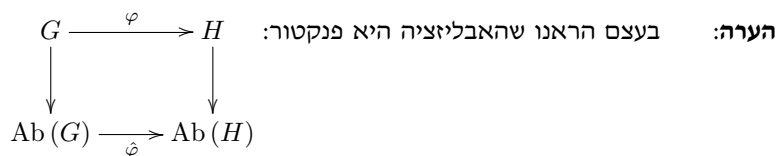
תרגיל 6 שאלה 3

צריך להוכיח ש $Ab(G * H) \cong Ab(G) \times Ab(H)$.

פתרון



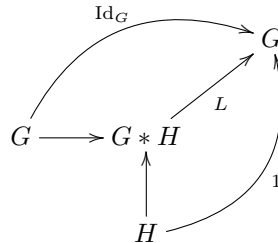
$Ab(G) \rightarrow Ab(G * H) \rightarrow Ab(H)$ אבל $G \rightarrow Ab(G)$, ולכן קיים גם הומומורפיזם $Ab(G) \rightarrow Ab(G * H)$.



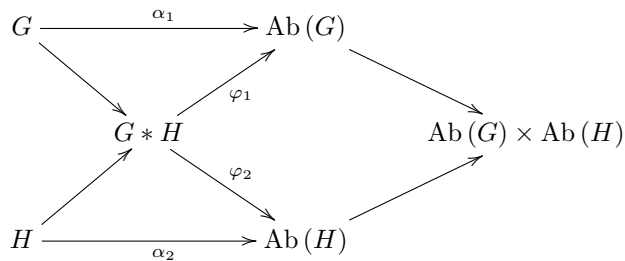
הראנו שקיימים $g : \text{Ab}(G) \rightarrow \text{Ab}(G * H)$ ו- $h : \text{Ab}(H) \rightarrow \text{Ab}(G * H)$ נגדיר $L(k) = g(k) * h(k)$. נוכיח שזה הומומורפיזם: צ"ל $L(k_1 k_2) = L(k_1) L(k_2)$

$$\begin{aligned} L(k_1 k_2) &= g(\alpha(k_1 k_2)) h(\beta(k_1 k_2)) = \\ &= g(\alpha(k_1) \alpha(k_2)) h((\beta(k_1) \beta(k_2))) = \\ &= g(\alpha(k_1)) g(\varphi(k_2)) h(\beta(k_1)) h(\beta(k_2)) = \\ &= g(\alpha(k_1)) h(\beta(k_1)) g(\varphi(k_2)) h(\beta(k_2)) = L(k_1) L(k_2) \end{aligned}$$

הומומורפיזם $G * H \rightarrow G$ מוגדר ע"י מכפלה בין הומומורפיזם הזהות מ- G והומומורפיזם הטריבויאלי מ- H :



עכשיו, נוכיח שזה יחיד:



וצריך לסיים את זה...

פתרון אחר(של המרצה)

לפי התכונות האוניברסליות מקבלים:

$$\text{Ab}(G * H) \longrightarrow \text{Ab}(G) \times \text{Ab}(H)$$

אבל יש הומומורפיזמים טבעיים $\alpha : \text{Ab}(G) \rightarrow \text{Ab}(G * H)$ ו- $\beta : \text{Ab}(H) \rightarrow \text{Ab}(G * H)$. לכן נבחר $\varphi(xy) = \alpha(x) \beta(y)$. אבל הפעם זה כן בגלל שהדיאגרמה מתחלפת.