88-112 סמסטר א תשע"ז

ו' בטבת תשע"ז, 17.1.4.

הוראות: בהגשת הפתרון יש לרשום ת"ז ושם מלא.
יש לענות על כל השאלות ולרשום פתרונות מלאים ומנומקים!
משך הבוחן: 90 דקות.
חומר עזר: מחשבון (לא הכרחי).

שימו לב: סך כל הנקודות שניתן לצבור הוא 108, אך כל ציון מעל 100, ייחשב כ 100.

שאלה 1. תהי $\begin{pmatrix}2&4&3\\1&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ מטריצה מעל $\mathbb{R}$.

א. (16 נק') האם היא הפיכה?

ב. (20 נק') אם לא, מצאו פתרון **לא טריוואלי** למערכת ההומוגנית, ואם כן, מצאו את המטריצה ההופכית ומצאו פתרון למערכת $\begin{pmatrix}2&4&3\\1&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot x=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

פתרון.
נפתור את שני הסעיפים ביחד:
נדרג את המטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&4&3&1&0&0\\1&2&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

ונקבל את המטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&1\\0&1&0&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&0\end{array}\right)$$

. כלומר, המטריצה $\begin{pmatrix}2&4&3\\1&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ הפיכה (כי בצד שמאל קיבלנו את מטריצת היחידה),
וההופכית שלה היא המטריצה $\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&1\\\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&0\end{pmatrix}$.
כעת, מכיוון שהמטריצה הפיכה, מקבלים:

$$\begin{pmatrix}2&4&3\\1&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot x=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Longleftarrow$$

$$\Longleftarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \Longleftarrow x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 2. תהי $Ax = b$ מערכת משוואות לא הומגונית (כלומר $b \neq 0$) מעל $\mathbb{R}$, ונתון ש: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ פתרונות של המערכת.

א. (14 נק') האם $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ פתרון למערכת ההומגונית?

ב. (11 נק') האם $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ פתרון למערכת **הלא** הומגונית?

ג. (11 נק') האם $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ פתרון למערכת **הלא** הומוגנית?

הערה. במידה והתשובה שלכם לסעיף היא: "לא ניתן לדעת", יש לתת דוגמה שבה הוקטור הוא כן פתרון, דוגמה שבה הוא לא פתרון למערכת המתאימה.

פתרון.

א. תשובה: כן.
הוכחה:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b - b = 0$$

ב. תשובה: כן.
הוכחה:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = A \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b + 0 = b$$

ג. תשובה: לא.
הוכחה:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = A \cdot \left[7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 7 \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 7b \neq b$$

המעבר האחרון נובע מכך ש $b \neq 0$, ומכיוון שהמערכת היא מעל שדה הממשיים (אם $7b = b$, אחרי העברת אגפים נקבל $6b = 0$, ואם ניזכר בכפל סקלר במטריצה, נקבל ש $6 \cdot [b]_i = 0$ לכל i, ולכן $[b]_i = 0$ לכל i, ולכן $b = 0$, בסתירה).

שאלה 3. הוכח או הפרך:

א. (12 נק') $\{A \in \mathbb{F}^{nxn} \,|\, \forall B \in \mathbb{F}^{nxn} : AB = BA\}$ תת-מרחב וקטורי של $\mathbb{F}^{nxn}$.

ב. (12 נק') $\{P(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,|\, P(0) \cdot P(1) = 1\}$ תת-מרחב וקטורי של $\mathbb{R}_3[x]$.

ג. (12 נק') $\{P(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,|\, P(0) + P(1) = 0\}$ תת-מרחב וקטורי של $\mathbb{R}_3[x]$.

פתרון.

ג. תשובה: כן.
הוכחה: ראשית, קל לראות שמטריצת האפס שייכת לקבוצה.
כעת, לכל שתי מטריצות בקבוצה הזו A, A', ולכל סקלר $\alpha \in \mathbb{F}$, נרצה להראות שגם $A + \alpha A'$ נמצא בקבוצה.
תהי $B \in \mathbb{F}^{nxn}$ מטריצה כלשהי. אזי:

$$(A + \alpha A')B = AB + \alpha A'B = BA + \alpha BA' = B(A + \alpha A')$$

השיוויון השני נובע מכך ש A, A שייכות לקבוצה.
מכיוון שזה נכון לכל מטריצה B, גם $A + \alpha A'$ נמצא בקבוצה, ולכן קבוצה זו היא תת-מרחב של $\mathbb{F}^{nxn}$.

ג. תשובה: לא.
הוכחה: פולינום האפס (שהוא וקטור האפס במרחב הוקטורי $\mathbb{R}_3[x]$) אינו שייך לקבוצה.

ג. תשובה: כן.
הוכחה: ראשית, קל לראות שוקטור האפס (פולינום האפס) שייך לקבוצה.
כעת, יהיו P, Q איברים בקבוצה הזאת, ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$, סקלר בשדה. אזי:

$$(P + \alpha Q)(0) + (P + \alpha Q)(1) = P(0) + \alpha Q(0) + P(1) + \alpha Q(1) =$$

$$= (P(0) + P(1)) + \alpha(Q(0) + Q(1)) = 0 + \alpha \cdot 0 = 0$$

השוויון האחד לפני אחרון נובע מכך ש P, Q שייכים לקבוצה.
קיבלנו ש $P + \alpha Q$ גם בקבוצה, ולכן קבוצה זו היא תת-מרחב של $\mathbb{R}_3[x]$.

בהצלחה!