תרגול כיתה 8 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה
משתנים מקריים דו-מימדיים רציפים, קונבולוציה

מתרגלים: ליאור דקל ואדם צ'פמן

שאלה 1

נתונה פונקצית הצפיפות המשותפת של X ו-Y:

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-x}e^{-2y} & 0<x<\infty\,,\quad 0<y<\infty\\ 0 & else\end{cases}$$

חשב את ההסתברויות הבאות:

א. $P(X>1\,,Y<1)$

ב. $P(X<Y)$

ג. $P(X<a)$ (קבוע $a>0$ –)

פתרון:

א. $$P(X>1\,,Y<1)=\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=1}^{x=\infty}2e^{-x}e^{-2y}dxdy=\int_0^1 2e^{-2y}\left(-e^{-x}\Big|_1^\infty\right)dy$$

$$=e^{-1}\int_0^1 2e^{-2y}dy=e^{-1}\left(1-e^{-2}\right)$$

ב. $$P(X<Y)=\iint_{x<y}2e^{-x}e^{-2y}dxdy=\int_{y=0}^{\infty}\int_{x=0}^{y}2e^{-x}e^{-2y}dxdy$$

$$=\int_0^\infty 2e^{-2y}\left(1-e^{-y}\right)dy=\int_0^\infty 2e^{-2y}dy-\int_0^\infty 2e^{-3y}dy=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

ג.

$$P(X<a)=\int_0^a\int_0^\infty 2e^{-x}e^{-2y}dydx=\int_0^a\left[-e^{-x-2y}\right]_{y=0}^{y=\infty}dx$$

$$=\int_0^a e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^a=1-e^{-a}$$

שאלה 2

שני חברים מחליטים להפגש. כל אחד מהם מגיע למקום שנקבע, באופן בלתי בתלוי באחר, בזמן המתפלג אחיד בין 14:00 ל- 15:00. מצא את ההסתברות שהמגיע ראשון ימתין למעלה מ- 10 דקות.

פתרון: (הערה: אפשר גם להשתמש בשיקולים גיאומטריים)

נסמן ב-X וב-Y בהתאמה, את נקודות הזמנים (בדקות) לאחר השעה 14:00 שבהם חבר א' וחבר ב' מגיעים לפגישה. X ו-Y הם משתנים מקריים בלתי תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות אחידה בקטע [0,60]. ההסתברות המבוקשת היא $P(|X-Y|>10)$ או: $P(X+10<Y)+P(Y+10<X)$. מטעמי סימטריה הסתברות זו שווה ל- $2P(X+10<Y)$

והיא מתקבלת ע"י:

$$2P(X+10<Y)=2\iint\limits_{x+10<y} f(x,y)dxdy=2\iint\limits_{x+10<y} f_X(x)f_Y(y)dxdy=$$

$$=2\int_{y=10}^{60}\int_{x=0}^{y-10}\left(\frac{1}{60}\right)^2 dx\,dy=\frac{2}{60^2}\int_{10}^{60}(y-10)\,dy=\frac{25}{36}$$

<u>שאלה 3</u>

פונקציית הצפיפות המשותפת של X,Y נתונה ע"י:

$$f(x,y)=\begin{cases} c(1-x-y) & 0\le x\,,\,0\le y,\ x+y\le 1 \\ 0 & else \end{cases}$$

מצא את:

א. הקבוע c.

ב. $E(X),E(Y),V(X),V(Y)$

ג. $E(X\mid Y=y)$

ד. $\rho(X,Y)$

פתרון:

א. צריך להתקיים $1=\iint f(x,y)dydx$

כלומר:

$$1=\int_0^1\int_0^{1-x} c(1-x-y)\,dydx$$

$$1=\int_0^1 c\left[y-xy-\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x}dx=\int_0^1\frac{c}{2}(1-x)^2dx=\frac{c}{6}\qquad\Rightarrow\boxed{c=6}$$

ב. בכדי למצוא את התוחלת של X נמצא תחילה את הצפיפות השולית שלו:

$$f_X(x)=\int_0^{1-x}6(1-x-y)\,dy=3\left[2y-2xy-y^2\right]_0^{1-x}=3(x-1)^2$$

מטעמי סימטריה $f_Y(y)=3(y-1)^2$.

לכן התוחלת,

$$E(Y)=E(X)=\int_0^1 x\cdot 3(x-1)^2dx$$

$$=\int_0^1\left(3x^3-6x^2+3x\right)dx=\left[\frac{3x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

והשונות,

$$V(Y)=V(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$$

$$=\int_0^1 x^2\cdot 3(x-1)^2dx-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\left[\frac{3x^5}{5}-\frac{6x^4}{4}+\frac{3x^3}{3}\right]_0^1-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{80}$$

ג.
$$E(X|Y=y)=\int_0^{1-y} x\cdot f_{X|Y}(x|y)\,dx=\int_0^{1-y} x\cdot\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}\,dx$$
$$=\int_0^{1-y} x\cdot\frac{6(1-x-y)}{3(y-1)^2}\,dx=\frac{2}{(y-1)^2}\int_0^{1-y}\left(x-x^2-xy\right)dx=\frac{1-y}{3}$$

ד.
$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\cdot V(Y)}}=\frac{E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{V(X)\cdot V(Y)}}$$
$$E(X\cdot Y)=\int_0^1\int_0^{1-x} x\cdot y\cdot 6(1-x-y)\,dydx$$
$$=\int_0^1\left[-xy^2(2y-3+3x)\right]_0^{1-x}dx=\int_0^1 -x(1-x)^3\,dx$$
$$=\left[\frac{-x^5}{5}+\frac{3x^4}{4}-x^3+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{20}$$

נציב בנוסחת מקדם המתאם:
$$\rho(X,Y)=\frac{\frac{1}{20}-\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\sqrt{\frac{3}{80}\cdot\frac{3}{80}}}=-\frac{1}{3}$$

קונבולוציה

שימוש חשוב של קונבולוציה בהסתברות הוא חישוב סכום של מ"מ בלתי תלויים.

כאשר Y,X מ"מ ב"ת וסכומם Z = X + Y אזי –

עבור משתנים בדידים:

$$P\left(Z=k\right)=P\left(X+Y=k\right)=\sum_i P\left(X=i,Y=k-i\right)=\sum_i P\left(X=i\right)P\left(Y=k-i\right)$$

עבור משתנים רציפים:

$$P\left(Z\le k\right)=P\left(X+Y\le k\right)\Rightarrow f_Z(k)=f_{X+Y}(k)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(k-y)f_Y(y)dy$$

שאלה 4

יהיו Y ,X מ"מ ב"ת כך ש- $X\sim Exp\left(\lambda\right),\ \ Y\sim Exp\left(\lambda\right)$. מצא בעזרת קונבולוציה את התפלגות Z=X+Y.

פתרון:

פונקציות הצפיפות של Y,X הן

$$f_X(x)=f_Y(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & ,x\ge 0\\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

נעזר בנוסחת הקונבולוציה:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_0^z \lambda e^{-(z-y)}\lambda e^{-\lambda y}dy=\int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z}dy=\lambda^2 z e^{-\lambda z}$$

קיבלנו:

$$f_Z(z)=\begin{cases}\lambda^2 z e^{-\lambda z} & ,z\ge 0\\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

צפיפות זו ניתנת לזיהוי כהתפלגות גמה עם הפרמטרים $Z\sim Gamma(\alpha=2,\lambda)$.

תזכורת: $Gamma(\alpha,\lambda):\ \ f_X(x)=\dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$

שאלה 5

מטילים שתי קוביות הוגנות. מצא את פונקציית התפלגות סכום הערכים שהן מראות.

פתרון:

נסמן ב- X את הערך שמציגה הקובייה הראשונה. נסמן ב- Y את הערך שמציגה הקובייה השנייה. מכיוון שההטלות לא תלויות אחת בשנייה,

$$P(X+Y=a)=\sum_{k=1}^{6}P(X=k)P(Y=a-k)$$

כעת,

$$.P(Y=a-k)=\begin{cases}\frac{1}{6} & ,a-6\le k\le a-1\\ 0 & ,else\end{cases}$$

$|\{1,\dots,6\}\bigcap\{a-6,\dots,a-1\}|=6-|a-7|$ – לכל $2\le a\le 12$,

ולכן פונקציית ההתפלגות המבוקשת:

$$,P(X+Y=a)=\frac{1}{36}(6-|a-7|)$$

ולכל a אחר $P(X+Y=a)=0$.

שאלה 6

יהיו X, Y מ"מ ב"ת כך ש- $X\sim Bin(n,p),\ Y\sim Bin(m,p)$.

מצא בעזרת קונבולוציה את התפלגות Z=X+Y.

פתרון:

$$P\left(X+Y=k\right)=\sum_{i=0}^{n}P\left(X=i,Y=k-i\right)=\{id\}=\sum_{i=0}^{n}P\left(X=i\right)P\left(Y=k-i\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p^{i}\left(1-p\right)^{n-i}\binom{m}{k-i}p^{k-i}\left(1-p\right)^{m-k+i}$$

$$=p^{k}\left(1-p\right)^{n+m-k}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}\qquad\left\{(*):\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}\right\}$$

$$=p^{k}\left(1-p\right)^{n+m-k}\binom{n+m}{k}$$

$$=Bin\left(n+m,p\right)$$

כאשר השתמשנו בזהות הבינומית (*) לעיל וכן בכך ש- $\binom{b}{a}=0$ כאשר $a>b$.