אנליזה מודרנית תש"ף - תרגול 12

22 בינואר 2020

הגדרה: הגדרנו את מרחבי $L^p(X)$ לכל מרחב מידה חיובית $(X,\mathcal{S},\mu)$. נשים לב שעבור $\mathbb{N}$ עם מידת הספירה נקבל כי $\ell^p(X)=\{(x)\mid\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty\}$. נסמן $\|x\|_p=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p$. זהו מרחב בנך (בדומה ל־$L^p(X)$).

הגדרה: יהיו X,Y מרחבים לינאריים ונורמיים מעל שדה $\mathbb{F}$. אופרטור לינארי $T:X\to Y$ הוא העתקה המקיימת לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ ולכל $x,y\in X$, $T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)$.
בפרט, פונקציונל לינארי הוא העתקה לינארית $\varphi:X\to\mathbb{F}$.

הגדרה: לכל אופרטור לינארי $T:X\to Y$ אפשר להגדיר נורמה לפי

$$\|T\|=\sup_{0\neq x\in X}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$$

T נקרא חסום אם $\|T\|<\infty$.

משפט: אופרטור לינארי (ובפרט פונקציונל) הוא חסום אם ורק אם הוא רציף.

תרגיל: נגדיר פונקציונל $T:C[0,1]\to\mathbb{R}$ לפי $T(f)=f(0)$. הראו כי בנורמת המקסימום T רציף, אבל בנורמת $\|\cdot\|_2$, T לא רציף.

פתרון: בנורמת המקסימום, נראה כי T חסום ולכן רציף. תהי $f\in C[0,1]$ כך ש־$\|f\|=1$. כלומר $\max_{x\in[0,1]}|f(x)|=1$, ובפרט $T(f)=f(0)\leq 1$. לכן $\|T\|=\sup_{\|f\|=1}\|T(f)\|\leq 1<\infty$. אז T חסום ולכן רציף.

כעת נניח כי הנורמה במרחב היא $\|f\|_2=\left(\int_0^1|f|^2\,dm\right)^{\frac{1}{2}}$. נגדיר סדרה לפי $f_n(x)=\begin{cases}1-nx & x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]\\ 0 & x\in\left[\frac{1}{n},1\right]\end{cases}$. (אלו אכן פונקציות רציפות). נראה כי $f_n\to 0$ בנורמה, אבל $T(f_n)\nrightarrow T(0)$. אם כן,

$$\|f_n-0\|=\|f_n\|_2=\left(\int_0^1|f_n|^2\,dm\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_0^{\frac{1}{n}}|f_n|^2\,dm\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_0^{\frac{1}{n}}|1-nx|^2\,dm\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\int_0^{\frac{1}{n}}n^2x^2-2nx+1dm\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{n^2x^3}{3}-nx^2+x|_0^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3n}}\to 0$$

לעומת זאת, לכל n, $T(f_n)=f_n(0)=1$ אבל $T(0)=0$. לכן T לא רציף.

הגדרה: יהי X מרחב לינארי מעל שדה $\mathbb{F}$. מכפלה פנימית היא פונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X\to\mathbb{F}$ המקיימת לכל $u,v,w\in X$ ו־$\alpha,\beta\in\mathbb{F}$:

- אי־שליליות: $\langle u,u\rangle\geq 0$, ויש שוויון אם ורק אם $u=0$
- לינאריות ברכיב הראשון: $\langle \alpha u+\beta v,w\rangle=\alpha\langle u,w\rangle+\beta\langle v,w\rangle$
- הרמיטיות: $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$

תרגיל: במרחב $\mathbb{C}^{n\times n}$ נגדיר $A^*=\overline{A^T}$. הוכיחו כי $\langle A,B\rangle=tr\left(AB^*\right)$ היא מכפלה פנימית על המרחב.

פתרון: נראה שכל התנאים מתקיימים. נתחיל מאי־שליליות.

$$\langle A,A\rangle=tr\left(AA^*\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(AA^*\right)_{kk}=\sum_{k=1}^{n}R_k\left(A\right)C_k\left(A^*\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}a_{km}\overline{a_{km}}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left|a_{km}\right|^2\geq 0$$

יש שוויון אם ורק אם כל האיברים ב־A הם 0. כמו כן, לכל α,β מתקיים

$$\langle \alpha A+\beta B,C\rangle=tr\left(\left(\alpha A+\beta B\right)C^*\right)=tr\left(\alpha AC^*+\beta BC^*\right)=tr\left(\alpha AC^*\right)+tr\left(\beta BC^*\right)$$

$$=\alpha tr\left(AC^*\right)+\beta tr\left(BC^*\right)=\alpha\langle A,C\rangle+\beta\langle B,C\rangle$$

נותר להוכיח הרמיטיות. אכן,

$$\overline{\langle B,A\rangle}=\overline{tr\left(BA^*\right)}=\overline{tr\left(\left(BA^*\right)^T\right)}=\overline{tr\left(A^{*T}B^T\right)}=tr\left(\overline{A^{*T}B^T}\right)=tr\left(AB^*\right)=\langle A,B\rangle$$

טענה (זהות המקבילית): יהי X מרחב מכפלה פנימית. נגדיר נורמה לפי $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$. אז

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$$

תרגיל: הראו כי נורמת המקסימום במרחב $C\left[a,b\right]$ לא מושרית מאף מכפלה פנימית.

פתרון: נראה כי שוויון המקבילית לא מתקיים, ולכן זה לא מרחב מכפלה פנימית. נגדיר

$$f=\begin{cases}\frac{2}{a-b}x-\frac{a+b}{a-b} & x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]\\ 0 & x\in\left[\frac{a+b}{2},b\right]\end{cases},\ g=\begin{cases}0 & x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]\\ \frac{2}{b-a}x-\frac{a+b}{b-a} & x\in\left[\frac{a+b}{2},b\right]\end{cases}$$

(קל להבין יותר על ידי ציור - f מתחילה מ־1 ויורדת לינארית עד 0 באמצע הקטע, ומשם נשארת 0. g מתחילה ב־0 עד אמצע הקטע והחל מאמצעו עולה לינארית ל־1). אפשר לראות כי $\|f\|=\|g\|=\|f+g\|=\|f-g\|=1$, לכן

$$2=1+1=\|f+g\|^2+\|f-g\|^2\neq 2\|f\|^2+2\|g\|^2=2+2=4$$

הגדרה: מרחב הילברט הוא מרחב מכפלה פנימית שלם.

משפט (משפט ההצגה של ריס): יהי H מרחב הילברט ויהי $\varphi : H \to \mathbb{F}$ פונקציונל לינארי רציף. אז קיים $x \in H$ כך שלכל $y \in H$ מתקיים $\varphi(y) = \langle x, y \rangle$.

תרגיל: נגדיר את $M \subseteq \ell^2$ להיות תת־המרחב של הסדרות $x \in \ell^2$ כך ש־$x_n = 0$ פרט למספר סופי של איברים. הראו כי משפט ההצגה של ריס לא מתקיים ב־M.

פתרון: ℓ^2 הוא מרחב הילברט, עם מכפלה פנימית לפי $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$. M יורש את אותה מכפלה פנימית, אבל M לא מרחב הילברט כי הוא לא שלם. (למשל, נגדיר סדרת סדרות $\{x^n\} \subseteq M$ לפי $x^n = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots\right)$. זו סדרת קושי שלא מתכנסת לגבול ב־M). נגדיר את הפונקציונל $L(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n^2}$. זה אכן פונקציונל לינארי, והוא חסום ולכן רציף. מדוע הפונקציונל חסום? תהי $y \in M$ סדרה עם $\|y\| = 1$. בפרט, $|y_n| \le 1$ לכל n. לכן

$$|L(y)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n^2}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_n|}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

ואז $\|L\| \le \frac{\pi^2}{6} < \infty$. כעת נניח בשלילה שמשפט ההצגה של ריס מתקיים, כלומר קיים $x \in M$ כך שלכל $y \in M$ מתקיים $L(y) = \langle x, y \rangle$. קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $x_n = 0$. נבחר $n_0 > N$ ונגדיר סדרה y לפי $y_n = \begin{cases} 1 & n = n_0 \\ 0 & n \ne n_0 \end{cases}$. אז $L(y) = \frac{1}{n^2}$, אבל $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} = 0$ בסתירה.

הגדרה: יהי X מרחב מכפלה פנימית, ותהי $S \subseteq X$ קבוצה.
נגדיר $S^{\perp} = \{x \in X \mid \forall s \in S : \langle x, s \rangle = 0\}$.

משפט: יהי H מרחב הילברט, ויהי $E \subseteq H$ תת־מרחב סגור. אז לכל $f \in H$ יש פירוק $f = g + h$ כאשר $g \in E$ ו־$h \in E^{\perp}$. g נקרא ההיטל האורתוגונלי של f על E.

תרגיל: יהי H מרחב הילברט.

1. הראו כי אם $S \subseteq H$ תת־מרחב, אז $S^{\perp}$ היא קבוצה סגורה.
2. הראו כי $S = \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$ אם ורק אם S סגורה.

פתרון: לסעיף הראשון, נוכיח שלכל סדרה $\{v_n\} \subseteq S^{\perp}$ כך ש־$v_n \to v$ מתקיים $v \in S^{\perp}$. אם כן, לכל n ולכל $s \in S$ מתקיים $\langle v_n, s \rangle = 0$. נגדיר פונקציונל לפי $f_s(x) = \langle x, s \rangle$. ממשפט ההצגה של ריס זהו פוקציונל רציף, ולכן

$$\langle v, s \rangle = f_s(v) = \lim_{n\to\infty} f_s(v_n) = \lim_{n\to\infty} \langle v_n, s \rangle = 0$$

לכל $s \in S$. כלומר $v \in S^{\perp}$.
עבור הסעיף השני, קל לראות כי אם $S = \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$ אז S סגורה, מהסעיף הקודם. נניח ש־S סגורה, ונוכיח כי $S = \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$. ההכלה $S \subseteq \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$ ברורה, כי כל איבר ב־S ניצב לכל

ניצב שלו. כעת יהי $v \in \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$. נראה כי $v \in S$. S היא תת־מרחב סגור, ולכן יש פירוק $v = g + h$ כאשר $g \in S$ ו־$h \in S^{\perp}$. בפרט $g \in \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$, ולכן $h = v - g \in \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$ (כי זה תת־מרחב לינארי). סך הכל קיבלנו כי $h \in S^{\perp} \cap \left(S^{\perp}\right)^{\perp} = \{0\}$, לכן $h = 0$, כלומר $v = g \in S$. קיבלנו כי $S = \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$.