מתמטיקה בדידה – תרגיל 1 – פתרון

שאלה 1

הוכח או הפרך בעזרת טבלאות אמת את השקילות של הפסוקים:

a. $(a \wedge b) \rightarrow a \equiv a \rightarrow (b \rightarrow a)$

b. $a \wedge \neg(b \vee c) \equiv (a \wedge \neg b) \wedge (a \wedge \neg c)$

c. $a \leftrightarrow b \equiv (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg c)$

d. $(a \rightarrow b) \rightarrow c \equiv a \rightarrow (b \rightarrow c)$

פתרון

א. שני הפסוקים הם טאוטולוגיה ולכן שקולים.

a	b	a ∧ b	**(a ∧ b) → a**	b → a	**a → (b → a)**
T	T	T	**T**	T	**T**
T	F	F	**T**	T	**T**
F	T	F	**T**	F	**T**
F	F	F	**T**	T	**T**

ב. שני הפסוקים מקבלים אותם ערכים לוגיים ולכן שקולים.

a	b	c	¬b	¬c	b∨c	¬(b∨c)	**a∧¬(b∨c)**	a∧¬b	a∧¬c	**(a∧¬b)∧(a∧¬c)**
T	T	T	F	F	T	F	**F**	F	F	**F**
T	T	F	F	T	T	F	**F**	F	T	**F**
T	F	T	T	F	T	F	**F**	T	F	**F**
T	F	F	T	T	F	T	**T**	T	T	**T**
F	T	T	F	F	T	F	**F**	F	F	**F**
F	T	F	F	T	T	F	**F**	F	F	**F**
F	F	T	T	F	T	F	**F**	F	F	**F**
F	F	F	T	T	F	T	**F**	F	F	**F**

ג. שני הפסוקים לא מקבלים תמיד את אותם ערכים לוגיים ולכן שקולים.

a	b	c	¬a	¬c	a∧b	¬a ∧ ¬c	**(a∧b) ∨ (¬a ∧ ¬c)**	**a↔b**
T	T	T	F	F	T	F	**T**	**T**
T	T	F	F	T	T	F	**T**	**T**
T	F	T	F	F	F	F	**F**	**F**
T	F	F	F	T	F	F	**F**	**F**
F	T	T	T	F	F	F	**F**	**F**
F	T	F	T	T	F	T	**T**	**F**
F	F	T	T	F	F	F	**F**	**T**
F	F	F	T	T	F	T	**T**	**T**

ד. שני הפסוקים לא מקבלים תמיד את אותם ערכים לוגיים ולכן שקולים.

a	b	c	a → b	**(a → b) → c**	b → c	**a → (b → c)**
T	T	T	T	**T**	T	**T**
T	T	F	T	**F**	F	**F**
T	F	T	F	**T**	T	**T**
T	F	F	F	**T**	T	**T**
F	T	T	T	**T**	T	**T**
F	T	F	T	**F**	F	**T**
F	F	T	T	**T**	T	**T**
F	F	F	T	**F**	T	**T**

שאלה 2

תהי P קבוצת האנשים בעולם ותהי N קבוצת השמות בעולם. נגדיר את היחס (=פרדיקט) הבא:

- $R(x,y)$ – השם של האיש x הוא y.

כתבו את הטענות הבאות ע"י שימוש ב-P,N,R, יחס השוויון ($=$ או $\neq$) והקשרים והכמתים הלוגיים שראינו בשיעור ($\forall,\exists,\wedge,\vee,\dots$).

1. לכל איש יש שם
2. קיים איש עם שם יחיד

3. אם קיים איש עם שם יחיד אז לא קיים איש ללא שם
4. לכל איש עם שם יש שם נוסף (שונה מהראשון)
5. קיימים שני אנשים (שונים) עם אותו שם.
6. לכל איש עם שם קיים איש אחר עם אותו שם.

פתרון

1. $\forall p \in P\ \exists n \in N: R(p,n)$

2. $\exists p \in P\ \exists n \in N: \left[R(p,n) \wedge \left(\forall n' \in N: R(p,n') \to (n = n')\right)\right]$
(החלק האדום מוודא שהשם יהיה יחיד)

3. $\left[\exists p \in P\ \exists n \in N: \left[R(p,n) \wedge \left(\forall n' \in N: R(p,n') \to (n = n')\right)\right]\right] \to \sim[\exists p \in P\ \forall n \in N: \sim R(p,n)]$
החלק הכחול הוא התשובה לסעיף 2.

4. $\forall p \in P: \left[\left(\exists n \in N: R(p,n)\right) \to \left(\exists n, n' \in N: R(p,n) \wedge R(p,n') \wedge (n \neq n')\right)\right]$
[החלק הירוק אומר של-p קיים שם. החלק הכתום אומר של-p קיימים שני שמות שונים.]

5. $\exists p, p' \in P: \left[(p \neq p') \wedge \left[\exists n \in N: \left(R(p,n) \wedge R(p',n)\right)\right]\right]$

6. $\forall p \in P: \left[\left(\exists n \in N: R(p,n)\right) \to \left(\exists p' \in P: (p \neq p') \wedge \left[\exists n \in N: \left(R(p,n) \wedge R(p',n)\right)\right]\right)\right]$
(הסבר: לכל איש p: אם קיים ל-p שם אז קיים איש p' כך ש-$p \neq p'$ וגם ל-p, p' קיים שם משותף.)

שאלה 3

בסימונים של שאלה 2, ענו על השאלות הבאות:

א. נניח כי טענות 2 ו-3 (משאלה 2) נכונות. האם טענה 1 נכונה? אם כן, הוכיחו זאת. אם לא, הפריכו ע"י דוגמא.
ב. האם טענה 6 גוררת את טענה 5? אם כן, הוכיחו. אם לא, הפריכו ע"י דוגמא.
ג. נניח שטענה 3 שקרית. מה ניתן לומר על טענה 4? אם לא ניתן לדעת כלום, הדגימו זאת.

פיתרון

א: אם טענות 2 ו-3 נכונות אז טענה 1 נכונה. נסביר מדוע: טענה 3 בעצם אומרת:
"אם [טענה 2] אז [לא קיים איש ללא שם]".
לכן, אם טענה 2 נכונה אז "לא קיים איש ללא שם". לפי חוקי דה מורגן, הטענה הזו שקולה ל"לכל איש יש שם" וזו בדיוק טענה 1.

אותו פיתרון בנוסח אחר: נגדיר פרדיקט חדש $A(x) = \exists n \in N: R(x,n)$ שאומר שלאיש x קיים שם. נניח כי טענות 2 ו-3 נכונות. אזי טענה 3 אומרת "אם {טענה 2} אז $\sim\exists x \sim A(x)$". לכן הטענה $\sim\exists x \sim A(x)$ נכונה. לפי חוקי דה מורגן, היא שקולה ל-$\forall x A(x)$ ולכן גם $\forall x A(x)$ נכון. אבל $\forall x A(x)$ זו בעצם טענה 1 ולכן גמרנו.

ב: טענה 6 אינה בהכרח גוררת את טענה 5. זה יכול לקרות רק אם לכל האנשים בעולם שלנו אין שם. נדגים זאת: נניח שב-P רק איש אחד, שיסומן ב-p_0 וב-N יש רק שם אחד שיסומן ב-n_0 (כלומר $P = \{p_0\}$ ו-$N = \{n_0\}$). נגדיר את הפרדיקט R ע"י $R(p_0, n_0) = F$ (כלומר, n_0 לא שם של p_0).

טענה 6 אומרת "לכל איש $p \in P$: {ל-p יש שם} גורר {...}", אבל בעולם שלנו הטענה " ל-p יש שם" תמיד שקרית (האיש היחיד הוא p_0 ואין לו שם) ולכן הגרירה "{ל-p יש שם} גורר {...}" תמיד נכונה. היות וזה נכון לכל $p \in P$, טענה 7 נכונה.

מצד שני, טענה 6 אומרת כי קיימים שני אנשים שונים עם אותו שם. אבל בעולם שלנו לא יכולים להיות שני אנשים שונים כי יש רק איש אחד. לכן, טענה 6 שקרית.

הערה: אפשר גם לבחור את קבוצת השמות להיות קבוצה ריקה.

ג: אם טענה 3 שקרית אז טענה 4 גם שקרית. הסבר: טענה 3 אומרת "אם {קיים איש עם שם יחיד} אז {לא קיים איש ללא שם}". טענה כזו היא שקרית רק כאשר הטענה "קיים איש עם שם יחיד" נכונה והטענה "לא קיים איש ללא שם" שגויה. לכן, מהשיקריות של 3 נובע שקיים איש x_0 עם שם יחיד y_0 – כלומר ל-x_0 לא קיים שם z שונה מ-y_0. אבל זה אומר שטענה 3 שקרית.

שאלה 4

מה השלילות של הפסוקים הבאים (בתשובתכם עליכם לוודא שסימן השלילה יופיע רק לפני פסוקים אטומיים)

א. $\forall(x \in \mathbb{R})\exists(y \in \mathbb{Z})\big((y > x) \wedge (x \leq y+1)\big)$

ב. $\big[\exists(x \in A)\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big)\big] \rightarrow \big[\forall(x \in A)\big(Q(x) \leftrightarrow P(x)\big)\big]$

פתרון

א.
$$\begin{aligned}
&\sim\forall(x \in \mathbb{R})\exists(y \in \mathbb{Z})\big((y > x) \wedge (x \leq y+1)\big) \equiv\\
&\exists(x \in \mathbb{R}) \sim \Big(\exists(y \in \mathbb{Z})\big((y > x) \wedge (x \leq y+1)\big)\Big) \equiv\\
&\exists(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{Z})\sim\big((y > x) \wedge (x \leq y+1)\big) \equiv\\
&\exists(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{Z})\big(\sim(y > x) \vee \sim(x \leq y+1)\big) \equiv\\
&\exists(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{Z})\big((y \leq x) \vee (x > y+1)\big)
\end{aligned}$$

ב. בפיתרון נעזר בכללים הבאים: $\sim(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \sim B$ וב-$\sim(A \leftrightarrow B) \equiv (\sim A) \leftrightarrow B$:

$$\begin{aligned}
&\sim\Big[\big[\exists(x \in A)\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big)\big] \rightarrow \big[\forall(x \in A)\big(Q(x) \leftrightarrow P(x)\big)\big]\Big] \equiv\\
&\big[\exists(x \in A)\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big)\big] \wedge \sim\big[\forall(x \in A)\big(Q(x) \leftrightarrow P(x)\big)\big] \equiv\\
&\big[\exists(x \in A)\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big)\big] \wedge \big[\exists(x \in A)\sim\big(Q(x) \leftrightarrow P(x)\big)\big] \equiv\\
&\big[\exists(x \in A)\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big)\big] \wedge \Big[\exists(x \in A)\Big(\big(\sim Q(x)\big) \leftrightarrow P(x)\Big)\Big]
\end{aligned}$$

שאלה 5

פשטו את הביטוי תוך שימוש בחוקי פעולות מעל הקבוצות:

$(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C^C \cap D) \cup (A^C \cap B)$.

פתרון

$(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C^C \cap D) \cup (A^C \cap B) =$	[חילוף]
$(A \cap B) \cup (A^C \cap B) \cup (A \cap B \cap C^C \cap D) =$	[קיבוץ]
$\big((A \cup A^C) \cap B\big) \cup (A \cap B \cap C^C \cap D) =$	$[A \cup A^C = U]$
$(U \cap B) \cup (A \cap B \cap C^C \cap D) =$	[ניטרליות]

$B \cup \left(B \cap (A \cap C^C \cap D)\right) =$ $[A \cup (A \cap B) = A]$
B

שאלה 6

א. הוכיחו על ידי שימוש בחוקי פעולות על הקבוצות:
$\left(A \setminus B\right) \bigcup \left(B \setminus A\right) = \left(A \cup B\right) \setminus \left(A \cap B\right)$ (הערה: מהתרגיל נובעת הגדרה נוספת ל-$A\Delta B$)

ב. הראו כי: $A \cap B = \phi \quad \Leftrightarrow \quad A\Delta B = A \cup B$

הוכחה

סעיף א:

$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) =$ $[A \setminus B = A \cap B^c]$
$(A \cap B^C) \cup (B \cap A^C) =$ [פילוג]
$\left(A \cup (B \cap A^C)\right) \cap \left(B^C \cup (B \cap A^C)\right) =$ [פילוג]
$\left((A \cup B) \cap (A \cup A^C)\right) \cap \left((B^C \cup B) \cap (B^C \cup A^C)\right) =$ $[A \cup A^C = U]$
$\left((A \cup B) \cap U\right) \cap \left(U \cap (B^C \cup A^C)\right) =$ [ניטרליות]
$(A \cup B) \cap (A^C \cup B^C) =$ [דה-מורגן]
$(A \cup B) \cap (A \cap B)^C =$ $[A \setminus B = A \cap B^c]$
$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

סעיף ב:

כוון א: נניח כי $A \cap B = \phi$. אזי
$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus \phi = (A \cup B) \cap \phi^C = (A \cup B) \cap U = A \cup B$$
כדרוש.

כוון ב: נניח ש-$A\Delta B = A \cup B$ ונניח בשלילה שקיים $x \in A \cap B$. אזי $x \in A$ ולכן $x \in A \cup B = A\Delta B$ (לפי הגדרת האיחוד). מצד שני, $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ולפי הגדרת הפרש קבוצות נובע ש-$x \notin (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A\Delta B$. קיבלנו ש-$x \in A\Delta B$ וגם $x \notin A\Delta B$, סתירה. לכן, $A \cap B$ ריקה.

דרך אחרת להראות את כוון ב: נניח ש-$A\Delta B = A \cup B$, אזי $\phi = (A \cup B) \setminus (A\Delta B)$ (כי לכל קבוצה X מתקיים $X \setminus X = \phi$). לכן:

$$\phi = (A \cup B) \setminus (A\Delta B) = (A \cup B) \cap (A\Delta B)^C = (A \cup B) \cap \left((A \cup B) \setminus (A \cap B)\right)^C =$$
$$(A \cup B) \cap \left((A \cup B) \cap (A \cap B)^C\right)^C = (A \cup B) \cap ((A \cup B)^C \cup (A \cap B)^{CC}) =$$
$$(A \cup B) \cap \left((A \cup B)^C \cup (A \cap B)\right) = \left((A \cup B) \cap (A \cup B)^C\right) \cup \left((A \cup B) \cap (A \cap B)\right) =$$
$$\phi \cup \left((A \cup B) \cap (A \cap B)\right) = (A \cup B) \cap (A \cap B) = \left((A \cup B) \cap A\right) \cap B = A \cap B$$

כלומר, $A \cap B = \phi$, כדרוש.