אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 3

6 בנובמבר 2020

1. פתרו את המשוואות הבאות:

(א) $z^3 = 6\text{cis}\frac{\pi}{5}$

(ב) $(\overline{z})^4 = 2+i$

(ג) $z^3 \cdot (1+i) = 2$

(ד) $3z^5 - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2}$

<u>פתרון:</u>

א. לפי המסקנה ממשפט דה־מואבר נקבל

$$z_k = \sqrt[3]{6}\text{cis}(\frac{\pi}{15}+\frac{2\pi k}{3}), k \in \{0,1,2\}$$

כלומר, $z_0 = \sqrt[3]{6}\text{cis}\frac{\pi}{15}, z_1 = \sqrt[3]{6}\text{cis}\frac{11\pi}{15}, z_2 = \sqrt[3]{6}\text{cis}\frac{7\pi}{5}$.

ב. נצמיד את שני הצדדים: $\overline{(\overline{z})^4} = 2-i$, ואז לפי כללי הצמוד נקבל:

$$z^4 = 2-i = \sqrt{5}\text{cis}333.435$$

כעת נפעיל את דה־מואבר לקבל: $z_0 = \sqrt[8]{5}\text{cis}83.359, z_1 = \sqrt[8]{5}\text{cis}173.359, z_2 = \sqrt[8]{5}\text{cis}263.359, z_3 = \sqrt[8]{5}\text{cis}353.359$.

ג. גם כאן צריך קצת משחק עד שרואים משוואה שאותה אנחנו יודעים לפתור עם דה־מואבר:

$$z^3 \cdot (1+i) = 2 \Rightarrow z^3 = \frac{2}{1+i} = \frac{2\text{cis}0}{\sqrt{2}\text{cis}\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\text{cis}-\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\text{cis}\frac{7\pi}{4}$$

ועכשיו לפי דה־מואבר נקבל: $z_0 = \sqrt[6]{2}\text{cis}\frac{7\pi}{12}, z_1 = \sqrt[6]{2}\text{cis}\frac{15\pi}{12}, z_2 = \sqrt[6]{2}\text{cis}\frac{23\pi}{12}$.

ד. גם כאן צריך לסדר טיפה את המשוואה. נקבל:

$$z^5 = \frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{3} = -\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}i = \frac{2}{6}\text{cis}120$$

עכשיו לפי דה־מואבר נקבל

$$z_k = \sqrt[5]{\frac{2}{6}}\text{cis}\left(\frac{120+360k}{5}\right)$$

ואחרי הצבה נקבל: $z_0 = \sqrt[5]{\frac{2}{6}}\text{cis}24, z_1 = \sqrt[5]{\frac{2}{6}}\text{cis}96, z_2 = \sqrt[5]{\frac{2}{6}}\text{cis}168, z_3 = \sqrt[5]{\frac{2}{6}}\text{cis}240, z_4 = \sqrt[5]{\frac{2}{6}}\text{cis}312$.

2. שורשי היחידה.

(א) מצאו שני שורשי יחידה שונים מסדר 5, z, w, כך ש־ $z \cdot w = 1$.

(ב) מצאו שלושה שורשי יחידה שונים מסדר 7, z, w, q, כך ש $z \cdot w \cdot q = 1$

<u>פתרון:</u>

א. כזכור, שורשי היחידה מסדר 5 הם המספרים: $\text{cis}\frac{2\pi k}{5}, k \in \{0, \dots 4\}$. ניקח $k_1 = 2, k_2 = 3$ ונקבל:

$$\text{cis}\frac{2\pi\cdot 2}{5}\cdot\text{cis}\frac{2\pi\cdot 3}{5} = \text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 2}{5}+\frac{2\pi\cdot 3}{5}\right) = \text{cis}\frac{2\pi\cdot 5}{5} = \text{cis}2\pi = \text{cis}0 = 1$$

כאשר בשיוויון הראשון השתמשנו במשפט דה־מואבר.

ב. באותו רעיון שורשי היחידה מסדר 7 הם $\text{cis}\frac{2\pi k}{7}, k \in \{0, \ldots 6\}$. ניקח $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 4$ ונקבל:

$$\text{cis}\frac{2\pi \cdot 1}{7} \cdot \text{cis}\frac{2\pi \cdot 2}{7} \cdot \text{cis}\frac{2\pi \cdot 4}{7} = \text{cis}\left(\frac{2\pi \cdot (1+2+4)}{7}\right) = \text{cis}2\pi = 1$$

3. נתון המספר המרוכב $z = r\text{cis}\theta$, עם $r > 0$, ונתון עוד מספר $w = \frac{z}{\overline{z}}$.

(א) הביעו באמצעות r, θ את $w, \overline{w}, -\frac{1}{w}$.

(ב) נתון ש w נמצא ברביע הראשון. מהו טווח הזויות האפשרי עבור θ?

(ג) נתונה סדרה הנדסית a_n שבה $a_1 = \frac{1}{z}, a_2 = w$. הראו שאם z נמצא מחוץ למעגל היחידה אז גם a_5 נמצא מחוץ למעגל היחידה.

<u>פתרון:</u>

א. $w = \frac{r\text{cis}\theta}{r\text{cis}(-\theta)} = \text{cis}(\theta - (-\theta)) = \text{cis}2\theta$, ולכן נקבל: $\overline{w} = \text{cis}(-2\theta)$. על מעגל היחידה ההופכי והצמוד הם אותו דבר (באופן כללי: להופכי ולמצוד יש אותה זוית, והנורמות הופכיות אחת לשניה. על מעגל היחידה הנורמות מתלכדות ולכן זה יוצא אותו מספר.), ולכן נקבל: $-\frac{1}{w} = -\overline{w} = \text{cis}(\pi - 2\theta)$.

ב. הנתון נותן לנו תנאי על הזוית של w: $0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$, ולכן נקבל שהטווח עבור θ הוא $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$.

ג. נבדוק מה המנה: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{w}{\frac{1}{z}} = w \cdot z = \text{cis}2\theta \cdot r\text{cis}\theta = r\text{cis}3\theta$. נקבל מכאן:

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = \frac{1}{r}\text{cis}(-\theta) \cdot (r\text{cis}3\theta)^4 = \frac{1}{r}\text{cis}(-\theta) \cdot r^4\text{cis}12\theta = r^3\text{cis}11\theta$$

כעת, אם $r > 1$ אז גם $r^3 > 1$, ולכן אם z מחוץ למעגל אז גם a_5.