שאלה 3

1. הוכחה. תהי פונקציה f חסומה בקטע $[a,b]$. בהרצאה הוכחתם כי לכל צמד חלוקות P_1,P_2 שכנ"ל יתקיים
$$\underline{S}(P_1) \le \overline{S}(P_2).$$
כלומר שקול לומר שעבור f הנ"ל קיימות חלוקות P,T כך ש
$$\overline{S}(T) = \underline{S}(P).$$
לפיכך
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_Q \overline{S}(Q) \le \overline{S}(T) = \underline{S}(P) \le \sup_Q \underline{S}(Q) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$
האי"ש בכיוון השני טריוויאלי והפונקציה אכן אינטגרבילית.

2. הוכחה. f אינטג' ולכן חסומה בקטע ע"י איזה $M>0$. $g|_{[-M,M]}$ רציפה בקטע סגור וחסום (ולפיכך במ"ש). נסמן את החסם שלה בקטע ע"י $L>0$.כעת לכל $\varepsilon>0$ ובפרט עבור ε_1 (שיוגדר בהמשך) ניתן למצוא $\delta>0$ כך ש
$$\forall x,y\in[-M,M], \quad |x-y|<\delta \Rightarrow |g(x)-g(y)|<\varepsilon_1$$
לכל חלוקה P של הקטע, נסמן את התנודה של f בקטע הi שלה להיות $\omega_i = M_i - m_i$. עוד נסמן את הקבוצות
$$G(P,\delta) = \{i\in\{1,\dots,n\} \mid \omega_i \ge \delta\}$$
ובדומה
$$B(P,\delta) = \{i\in\{1,\dots,n\} \mid \omega_i < \delta\}.$$
כעת עבור איזה ε_2 אחר, מהיותה של f אינטג' אפשר למצוא חלוקה Π עבורה יתקיים
$$\varepsilon_2 > \omega(f,\Pi) = \sum_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i = \sum_{i\in B(\Pi,\delta)} \omega_i\Delta x_i + \sum_{i\in G(\Pi,\delta)} \omega_i\Delta x_i$$
אם נשמיט גורמים חיוביים משיוויון זה ובזכות תתי הקטעים מהקבוצה $B(\Pi,\delta)$ שבהם התנודה תהיה גדולה מδ יתקיים כי
$$\delta \sum_{i\in B(\Pi,\delta)} \Delta x_i \le \sum_{i\in B} \omega_i\Delta x_i < \varepsilon_2.$$
מכאן
$$\sum \Delta x_i < \frac{\varepsilon_2}{\delta}$$
כעת, את תנודת ההרכבה בתת קטע i, נסמן $\tilde{\omega}_i$ ועבורה יתקיים
$$\begin{aligned}\omega(g\circ f,\Pi) &= \sum_{i=1}^n \tilde{\omega}_i\Delta x_i \\ &= \sum_{i\in B(\Pi,\delta)} \tilde{\omega}_i\Delta x_i + \sum_{i\in G(\Pi,\delta)} \tilde{\omega}_i\Delta x_i\end{aligned}$$
g חסומה ע"י L בתמונת f ולפיכך $\tilde{\omega}_i$ תהיה חסומה ע"י $2L$.
$$\le 2L\sum_{i\in B} \Delta x_i + \varepsilon_1 \sum_{j\in G} \Delta x_j$$
כמו כמן לפי הגדרת $G(P,\delta)$, התנודה בקטעים אלו תהיה קטנה מδ ומהרבמ"ש שלה בקטע זה $M_i - m_i < \varepsilon_1$. כלומר אם נבחר $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \varepsilon_2 = \frac{\delta\varepsilon}{4L}$.
$$\omega(g\circ f,\Pi) < 2L\frac{\varepsilon_2}{\delta} + \varepsilon_1(b-a)$$
ולכן $\omega(g\circ f,\Pi) < \varepsilon$ ולפיכך הוכחנו את הטענה. ■