

תרגיל 5

29 בנובמבר 2012

1. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ מטריצה ממשית ($A \in M_4(\mathbb{R})$). מצא

$V \oplus W = \mathbb{R}^4$ תתי מרחבים אינווריאנטים תחת כפל ב A עם מימד 2 כך ש $V \oplus W = \mathbb{R}^4$. יש לפתור את התרגיל בלי להסתמך על תרגיל 2.

(רמז:) חשב את הפולינום האופייני של A והתייחס אל A כאל מטריצה מרוכבת).

2. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$, $f(\lambda)$ פולינום האופייני של A , $f = p_1(\lambda)p_2(\lambda)$ כאשר p_1, p_2 הם פולינומים זרים, כלומר $\gcd(p_1, p_2) = 1$. נסמן $V = \mathbb{F}^n$.

(א) נסמן $W_i := \ker \{p_i(A)v : v \in V\}$. הוכח: לכל i, W_i הוא מרחב אינווריאנטי תחת כפל ב A .

(ב) הוכח $V = W_1 \oplus W_2$. (תזכורת: מאלגוריתם אוקלידס של חילוק פולינומים נובע שאם p_1, p_2 הם פולינומים זרים, אזי קיימים פולינומים f_1, f_2 כך ש $f_1 p_1 + f_2 p_2 = 1$).

3. יהי V מרחב וקטורי, $W \subseteq V$ ת"מ.

(א) הוכח קיים $W' \subseteq V$ כך ש $W \oplus W' = V$.

(ב) נגדיר הטלה $P : V \rightarrow V$ באופן הבא: עבור $w \in W, w' \in W'$ אנו נגדיר $P(w + w') = w$.

יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור. הוכח: W הוא אינווריאנטי תחת T אם ורק אם $PTP = TP$.

4. נתבונן במטריצה ממשיות, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. לכל ערך עצמי λ של A מצא

את המרחב העצמי המוכלל המתאים V_λ , ואת המטריצה המייצגת של העתקה T_A , $(T_A(v) = Av)$ המצומצמת ל V_λ . הכלל את הדוגמה ל n כללי.

5. תהי $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ מטריצה ממשית.

- (א) מצא ערכים העצמיים והמרחבים העצמיים המוכללים של המטריצה.
- (ב) חשב את המטריצה המייצגת של העתקה T_A המצומצמת לכל מרחב עצמי ביחס לבסיס שלו.
- (ג) בטא את המטריצה המייצגת של T_A כמטריצת בלוקים אלכסונית ביחס לבסיס מתאים.

(הערה: אם אינכם יודעים איך להתמודד עם משוואות ממעלה 4 - נא לקרוא : <http://u.cs.biu.ac.il/~tsaban/LinearAlgebra/LAT73/RootSearch.pdf>