התמרות אינטגרליות

מרצה: פרופסור לאוניד שוסטר

הוקלד ע"י ליאורה גירז'מן ורון גרשינסקי

הרצאה 2:התמרת פורייה ב $L_1(\mathbb{R})$

1.הלמה של רימן (גיאורגי פרידריך בריכרד 1826-1866)

הגדרה 1.1:

נאמר שהפונקציה $f(x)$ שייכת ל $L_1(\mathbb{R})$, $R=(-\infty,\infty)$, אם $f(x)$ אינטגרבילית (במובן של רימן) בכל קטע $[a,b]$, $b-a<\infty$ ומתכנס האינטגרל הלא אמיתי:

$$\|f\|_1=\|f\|_{L_1(\mathbb{R})}=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$$

הלמה של רימן:

תהי הפונקציה $g(t)$ מוגדרת ב$[a,b]$, $b-a<\infty$ ומתקיים

$$\|g\|_{L_1(a,b)}=\int_a^b|g(t)|dt<\infty \quad (1.1)$$

אז מתקיימים האי-שוויונים:

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\sin pt=0,\ \lim_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\cos pt=0 \quad (1.2)$$

<u>הערה:</u> מכאן והלאה האינטגרלים הם במובן של רימן.

הוכחה:

אנו נשתמש בקריטריון של רימן לקיום אינטגרל רימן.

תהי הפונקציה $f(x)$ נתונה בקטע $[a,b]$, משתמש בחלוקה הקטע לפי הנקודות $x_0, x_1, ..., x_n$: $x_0 = a < x_1 < x_2 < ... x_i < x_{i+1} < ... < x_n = b$

נסמן $f(x)$ $\lambda = \max_{i=0..n-1} (x_{i+1} - x_i), \quad M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$

$i = 0..n-1 \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i,$, ולבסוף: $i = 0..n-1 \quad \omega_i = M_i - m_i,$ נקראת התנודה (טלטלה) של הפונקציה $f(x)$ ב $[x_i, x_{i+1}]$

הפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית לפי רימן ב$[a,b]$, $b-a<\infty$, אם ורק אם

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta_i = 0 \quad (1.3)$$

בלמה של רימן נוכיח רק את השוויון הראשון ב (1.2) (השני מוכח באופן דומה):

$$\lim_{p \to \infty} \int_a^b g(t) \sin pt dt = 0 \quad (1.2)$$

נשים לב, שבכל קטע $[a,b]$, $b-a<\infty$ מתקיים האי-שוויון:

$$\left| \int_a^b \sin pt dt \right| = \left| \frac{\cos pa - \cos pb}{p} \right| \le \frac{2}{p} \quad (1.4)$$

נחלק את הקטע $[a,b]$ לפי נקודות: $a = t_0 < t_1 < ... t_i < t_{i+1} < ... < t_n = b$ ובהתאם לחלוקה, נחלק את האינטגרל:

$$\int_a^b g(t) \sin pt dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t) \sin pt dt$$

יהיו M_i, m_i, ω_i $(i = 0..n-1)$ כמוגדר לעיל $\Leftarrow$

$$\int_a^b g(t)\sin pt dt=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}[g(t)-m_i]\sin pt dt+\sum_{i=0}^{n-1} m_i\int_{t_i}^{t_{i+1}}\sin pt dt\Rightarrow$$

$$\left|\int_a^b g(t)\sin pt dt\right|\le\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left|g(t)-m_i\right|\left|\sin pt\right|dt+\sum_{i=0}^{n-1}\left|m_i\right|\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}}\sin pt dt\right|$$

כעת, ידוע ש $m_i\le g(t),\ \ t\in\Delta_i\ \rightarrow\ g(t)-m_i\ge 0,\ \ t\in\Delta_i$

$$\left|\sin pt\right|\le 1 \qquad \int_{t_i}^{t_{i+1}}\sin pt dt\le\frac{2}{p}$$

$$\Rightarrow\left|\int_a^b g(t)\sin pt dt\right|\le\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}(g(t)-m_i)dt+\frac{2}{p}\sum_{i=1}^{n-1}\left|m_i\right|$$

$$0\le g(t)-m_i\le M_i,\ \ t\in\Delta_i$$

$$\Rightarrow\left|\int_a^b g(t)\sin pt dt\right|\le\sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{(M_i-m_i)}_{\omega_i}\Delta_i+\frac{2}{p}\sum_{i=1}^{n-1}\left|m_i\right|$$

יהי $\varepsilon>0$. מפני שהפונקציה $f(x)$ ב$[a,b]$, אז עבור $\varepsilon>0$ הנתון, לפי משפט רימן קיים $\delta>0$ כך ש לכל $\lambda\le\delta$ $\left(\lambda=\max_i\Delta_i\right)$ מתקיים האי-שוויון:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta_i\le\frac{\varepsilon}{2}$$

נבחר חלוקה מסוימת, ונקבע אותה, ואז כל m_i מוגדרים היטב לכל $i=1..n$ לפי החלוקה הנ"ל. נבחר מספר p , כך שיתקיים האי-שוויון:

$$p>\frac{4}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{n-1}m_i\Rightarrow\frac{\varepsilon}{2}>\frac{2}{p}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|\Rightarrow$$

$$\left|\int_a^b g(t)\sin ptdt\right|\le\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta_i+\frac{2}{p}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

מסקנה:

תהי $f(x)\in L_1(\mathbb{R})$ ו $a\in\mathbb{R}$. אזי:

$$\lim_{p\to\infty}\int_{-\infty}^{a} f(t)\sin ptdt=0,\ \lim_{p\to\infty}\int_{-\infty}^{a} f(t)\cos ptdt=0\quad(1.5)$$

$$\lim_{p\to\infty}\int_{a}^{\infty} f(t)\sin ptdt=0\ ,\ \lim_{p\to\infty}\int_{a}^{\infty} f(t)\cos ptdt=0$$

הוכחה:

את כל שוויונים מוכיחים בצורה זהה. נוכיח את השלישי.

יהי $\varepsilon>0$. כך ש $f(x)\in L_1(\mathbb{R})$, אז $\exists b>>1$ כך ש:

$$\left|\int_b^\infty f(t)\sin ptdt\right|\le\left|\int_b^\infty f(t)dt\right|\le\frac{\varepsilon}{2}$$

לפי משפט רימן, עבור $p>>1$ מתקיים:

$$\left|\int_a^b f(t)\sin ptdt\right|\le\frac{\varepsilon}{2}$$

זאת אומרת:

$$\left|\int_a^\infty f(t)\sin ptdt\right|\le\left|\int_a^b f(t)\sin ptdt\right|+\left|\int_b^\infty f(t)\sin ptdt\right|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

והשוויון השלישי מוכח. כל השאר מוכחים בצורה דומה.

2.התמרות פורייה

תהי $f(x)\in L_1(\mathbb{R})$. נגדיר פונקציה $F(\sigma)$ בשוויון הבא:

$$F(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\sigma t}dt,\quad \sigma\in\mathbb{R}\qquad (2.1)$$

הפונקציה $F(\sigma)$ מוגדרת היטב, מכיוון שהאינטגרל (.1) מתכנס בהחלט. הפונקציה $F(\sigma)$ נקראת *התמרת פורייה* של $f(t)\in L_1(\mathbb{R})$.

משפט 2.1 (רימן-לבג):

אם $f\in L_1(\mathbb{R})$, את תכונות התמרת הפורייה שלה הן:

1. $F(\sigma)$ פונקציה חסומה ב $\mathbb{R}$. בפרט:

$$\left|F(\sigma)\right|\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|f\right\|_1,\quad \forall\sigma\in\mathbb{R}\qquad (2.2)$$

2. הפונקציה $F(\sigma)$ (בכל נקודה $\sigma\in\mathbb{R}$)

3. מתקיים השוויון:

$$\lim_{|\sigma|\to\infty} F(\sigma)=0,\quad \forall f\in L_1(\mathbb{R})\qquad (2.3)$$

הוכחה *(סעיף 2 הוכח ע"י המרצה):*

1. לפי (2.1) ברור ש

$$\left|F(\sigma)\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\sigma t}dt\right|\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\underbrace{\left|e^{i\sigma t}\right|}_{=1}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1$$

2. לפי הגדרה, הפונקציה $F(\sigma)$ תהיה רציפה בנקודה $\sigma_0\in\mathbb{R}$, אם לכל סדרה $\sigma_n\to\sigma_0$ מתקיים: $\lim_{n\to\infty}F(\sigma_n)=F(\sigma_0)$, נזכר במסקה של משפט ארצלה:

מסקנה (3.7 מהרצאה 1):

תהי $\left\{\varphi_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות ב $R=(-\infty,\infty)$ בעלת התכונות הבאות:

1. $\forall n\ge1,\ \ \varphi_n(x)\in L_1(\mathbb{R})$

2. מוגדרת ב $\mathbb{R}$ פונקציה $\varphi(x)$ כך שהסדרה $\left\{\varphi_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל $\varphi(x)$ כמעט בכל $\mathbb{R}$ (כלומר השוויון $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$ מתקיים כמעט בכל $\mathbb{R}$)

אם מתקיימים התנאים:

3. קיימת פונקציה $F(x)\in L_1(\mathbb{R})$ (אינטגרבילית במובן של רימן) כך ש

$$\left|\varphi_n(x)\right|\le F(x),\ \ \forall x\in R,\ \ \forall n\ge1$$

4. $\varphi(x)\in L_1(\mathbb{R})$

אז מתקיים השוויון הבא:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx\left(=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)dx\right)$$

תהי נתונה הנקודה $\sigma_0 \in \mathbb{R}$. ניקח איזושהי סדרה $\left\{\sigma_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש
$\sigma_n \to \sigma_0$ כאשר $n \to \infty$. אזי:

$$F(\sigma_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\sigma_n t}dt,\ \ F(\sigma_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\sigma_0 t}dt$$

ועלינו להראות ש: $\lim\limits_{n\to\infty} F(\sigma_n)=F\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n\right)=F(\sigma_0)$ זאת אומרת:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\sigma_n t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\sigma_0 t}dt$$

נסמן $\varphi_n(t)=f(t)e^{i\sigma_n t},\ \ n\ge 1,\ \ \varphi(t)=f(t)e^{i\sigma_0 t},\ \ t\in R$

אז בהתאם למסקנה:

1. $\left|\varphi_n(t)\right|=\left|f(t)\right|\in L_1(\mathbb{R}),\ \ n\ge 1$
2. $\varphi_n(t)\to\varphi(t)$ כאשר $\forall t\in R,\ \ n\to\infty$ כיוון ש
$f(t)e^{i\sigma_n t}\to f(t)e^{i\sigma_0 t}$ עבור $\forall t\in R,\ \ n\to\infty$.

אם מתקיימים התנאים:

3. $\left|\varphi_n(t)\right|=\left|f(t)\right|\in L_1(\mathbb{R})$
4. $\left|\varphi(t)\right|=\left|f(t)\right|\in L_1(\mathbb{R})$

אז לפי המסקנה מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt$$

כאשר $\varphi_n(t),\varphi(t)$ מקיימות את הנ"ל, מתקבל:

$$\lim_{n\to\infty}F(\sigma_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\sigma_n t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\sigma_0 t}dt=F(\sigma_0)$$

3. כיוון ש

$$e^{i\sigma t}=\cos\sigma t+i\sin\sigma t\Rightarrow$$

$$F(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\sigma t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\sigma t dt+\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\sigma t dt$$

לפי למת רימן, כיוון ש $f\in L_1(\mathbb{R})$, נקבל:

$$\lim_{|\sigma|\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\sigma t dt=\lim_{\sigma\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\sigma t dt=0$$

$$\Rightarrow\lim_{\sigma\to\infty}F(\sigma)=0$$

***מסקנה** (של המרצה):*

תהי $f(t)\in L_1(\mathbb{R})$ ו

$$F_1(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\sigma t}dt,\quad \sigma\in\mathbb{R}\qquad(2.4)$$

אז האינטגרל $F_1(\sigma)$ מתכנס בהחלט והפונקציה $F_1(\sigma)$ בעלת התכונות 1-3:

1. $\left|F_1(\sigma)\right|\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_{L_1(\mathbb{R})},\quad\forall\sigma\in\mathbb{R}$

2. הפונקציה $F_1(\sigma)$ רציפה בכל נקודה $\sigma\in\mathbb{R}$

3. $\lim\limits_{|\sigma|\to\infty} F_1(\sigma)=0, \quad \forall f\in L_1(\mathbb{R})$

הוכחה:

מתקיים:

$$F_1(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\sigma t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(t)e^{i\sigma t}}dt=\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\sigma t}dt}$$
$$=\overline{F(\sigma)}$$

ממשפט (2.1) נקבל:

1. $\left|F_1(\sigma)\right|=\left|\overline{F}(\sigma)\right|=\left|F(\sigma)\right|\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_{L_1(\mathbb{R})}$

2. הפונקציות $F(\sigma),\overline{F}(\sigma)$ רציפות או לא רציפות ביחד. $F(\sigma)$ פונקציה רציפה $\forall\sigma\in\mathbb{R}$ $\leftarrow$ $\overline{F(\sigma)}=F_1(\sigma)$ פונקציה רציפה $\forall\sigma\in\mathbb{R}$

3. $\left|F_1(\sigma)\right|=\left|\overline{F}(\sigma)\right|=\left|F(\sigma)\right|\to 0$ עבור $\sigma\to\infty$ לפי משפט (2.1). מש"ל.

מסקנה 2.3:

תהי $f\in L_1(\mathbb{R})$ ו

$$\Phi_1(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\sigma t\,dt,\quad \sigma\in\mathbb{R}$$
$$\Phi_2(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\sigma t\,dt,\quad \sigma\in\mathbb{R}$$

אז האינטגרלים $\Phi_1(\sigma),\ \Phi_2(\sigma)$ מתכנסים בהחלט לכל $\sigma\in\mathbb{R}$ ובעלי התכונות 1-3:

1. מתקיימים האי-שוויונים הבאים:

$$\left|\Phi_1(\sigma)\right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\| f \right\|_{L_1(\mathbb{R})}, \quad \left|\Phi_2(\sigma)\right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\| f \right\|_{L_1(\mathbb{R})}$$

2. $\Phi_1(\sigma),\ \ \Phi_2(\sigma)$ פונקציות רציפות (לכל $\sigma \in \mathbb{R}$).

3. מתקיימים השוויונים:

$$\lim_{|\sigma|\to\infty} \Phi_1(\sigma) = \lim_{|\sigma|\to\infty} \Phi_2(\sigma) = 0, \quad \forall f \in L_1(\mathbb{R})$$

הוכחה:

ברור שמתקיימים השוויונים:

$$\Leftarrow \Phi_1(\sigma) = \mathrm{Re}\, F(\sigma), \ \ \Phi_2(\sigma) = \mathrm{Im}\, F(\sigma)$$

1. $\left|\Phi_1(\sigma)\right| \le \left|F(\sigma)\right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\| f \right\|_{L_1(\mathbb{R})}$

2. $F(\sigma)$ פונקציה רציפה $\forall \sigma \in \mathbb{R}$ $\leftarrow$ $\Phi_1(\sigma)$ פונקציה רציפה $\forall \sigma \in \mathbb{R}$.

3. $F(\sigma) \to 0$ כאשר $|\sigma| \to 0$ $\Leftarrow$ $\Phi_1(\sigma) = \mathrm{Re}\, F(\sigma) \to 0$ עבור $|\sigma| \to 0$.
הוכחה דומה עבור $\Phi_2(\sigma)$.

<u>3.תרגילים</u>

תרגיל 1:

מצא את התמרת הפורייה של הפונקציה :

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\geq 0 \\ 0 & , x<0 \end{cases}$$

פתרון:

ברור ש $f \in L_1(\mathbb{R})$, מכיוון ש

$$\| f \|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} | f(x) | dx = \int_{-\infty}^{0} | f(x) | dx + \int_{0}^{\infty} | f(x) | dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1$$

$$\Rightarrow F(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-x} e^{i\sigma x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{(-1+i\sigma)x} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-1+i\sigma} e^{(-1+i\sigma)x} \Big|_0^{\infty} = \left[\lim_{x\to\infty} e^{-x} e^{i\sigma x} = 0 \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1-i\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1+i\sigma}{1+\sigma^2}$$

תרגיל 2:

מצא את התמרת הפורייה של הפונקציה :

$$f(x) = e^{-\alpha |x|}, \quad \alpha > 0$$

פתרון:

ברור ש $f \in L_1(\mathbb{R})$:

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|}dx = 2\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}dx = \frac{2}{-\alpha}e^{-\alpha x}\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow$$

$$F(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|}e^{i\sigma x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|}(\cos\sigma x + i\sin\sigma x)dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-\alpha|x|}\cos\sigma x}_{even\ function}dx + \underbrace{\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-\alpha|x|}\sin\sigma x dx}_{odd\ function}}_{=0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\cos\sigma x dx$$

$$\Rightarrow J(\alpha) \overset{def}{=} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\cos\sigma x dx = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty}\cos\sigma x de^{-x} = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\cos\sigma x\Big|_0^{\infty} +$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty}(-\sigma)(\sin\sigma x)e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha} - \frac{\sigma}{\alpha}\int_0^{\infty}(\sin\sigma x)e^{-\alpha x}dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha} + \frac{\sigma}{\alpha^2}\int_0^{\infty}(\sin\sigma x)de^{-\alpha x} = \frac{1}{\alpha} + \underbrace{\frac{\sigma}{\alpha^2}e^{-\alpha x}\sin\sigma x\Big|_0^{\infty}}_{0} - \frac{\sigma^2}{\alpha^2}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\cos\sigma x dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^2 J(\alpha) \Rightarrow \frac{\alpha^2+\sigma^2}{\alpha^2}J(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow J(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha^2+\sigma^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{F(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}J(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+\sigma^2}}$$

תרגיל 3:

מצא את התמרת הפורייה של הפונקציה :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 0 \\ 0, & |x| \geq 0 \end{cases}$$

פתרון:

ברור ש $f\in L_1(\mathbb{R})$:

$$\|f\|_1=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\int_{-1}^{1}1dx=2\Rightarrow F(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\sigma x}dx=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}e^{i\sigma x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{i\sigma}-e^{-i\sigma}}{i\sigma}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(\cos\sigma+i\sin\sigma)-(\cos\sigma-i\sin\sigma)}{i\sigma}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\sigma}{\sigma}$$

תרגיל 4 (של המרצה):

מצא את התמרת הפורייה של הפונקציה :

$$f(x)=|x|e^{-\alpha|x|},\ \ x\in\mathbb{R}$$

פתרון:

ברור ש $f\in L_1(\mathbb{R})$, מכיוון ש

$$\|f\|_1=\int_{-\infty}^{\infty}|x|e^{-\alpha|x|}dx=2\int_{0}^{\infty}xe^{-\alpha x}dx=-2\int_{0}^{\infty}xdxe^{-x}=-2xe^{-x}\Big|_0^{\infty}+$$
$$+2\int_{0}^{\infty}e^{-x}dx=-2e^{-x}\Big|_0^{\infty}$$

נתבונן ב$F(\sigma)$ (עבור כל $\sigma\in\mathbb{R}$):

$$F(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|x|e^{-\alpha|x|}e^{i\sigma x}dx=\begin{bmatrix}|x|e^{-\alpha|x|}-even\ function\\ e^{i\sigma x}=\cos\sigma x+i\sin\sigma x\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{|x|e^{-\alpha|x|}\cos\sigma x}_{even\ function}dx+\underbrace{\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{|x|e^{-\alpha|x|}\sin\sigma x}_{odd\ function}}_{=0}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}xe^{-\alpha x}\cos\sigma x dx$$

תהי $S(\sigma)=\int_{0}^{\infty}xe^{-\alpha x}\cos\sigma x dx\Rightarrow S(\sigma)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}F(\sigma)$

נשים לב לכך ש $xe^{-x}\cos\sigma x=\frac{d}{d\sigma}\left(e^{-x}\sin\sigma x\right)$ לכן נתבונן באינטגרל:

$J(\sigma)=\int_{0}^{\infty}e^{-x}\sin\sigma x dx$, אם ניתן לחשב את $J(\sigma)$ ולהפעיל את כלל לייבניץ,

אנחנו נקבל:

$$\frac{d}{d\sigma}\left(J(\sigma)\right)=\frac{d}{d\sigma}\left(\int_{0}^{\infty}e^{-x}\sin\sigma x dx\right)=\int_{0}^{\infty}\frac{d}{d\sigma}\left(e^{-x}\sin\sigma x\right)dx=$$

$$=\int_{0}^{\infty}xe^{x}\cos\sigma x dx=S(\sigma)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}F(\sigma)$$

שרשרת השוויונים הנ"ל הינה תכנון פתרון הבעיה. נבדוק שניתן להפעיל על $J(\sigma)$ את כלל לייבניץ: $J(\sigma)=\int\limits_0^\infty f(x,\sigma)dx,\ \ f(x,\sigma)=e^{-x}\sin\sigma x$

1. $\forall\sigma\in\mathbb{R}_+$ קיים האינטגרל (ראה הרצאה 1 משפט 2.3)

$$\int\limits_0^\infty \left| f(x,\sigma)\right| dx \Rightarrow \int\limits_0^\infty e^{-x}\left|\sin\sigma x\right| dx<\int\limits_0^\infty e^{-x}dx=1<\infty$$

2. $\forall x\in[0,\infty]$ ו $\sigma\in\mathbb{R}$

$$\exists\frac{df}{d\sigma}(x,\sigma)\Rightarrow\frac{df}{d\sigma}=\frac{d}{d\sigma}(e^{-x}\sin\sigma x)=xe^{-x}\cos\sigma x$$

3. $\forall\sigma\in\mathbb{R}$ קיים $\int -x$ במובן של רימן:

$$\int\limits_0^\infty\left|\frac{df}{d\sigma}(x,\sigma)\right|d\sigma\Rightarrow\int\limits_0^\infty xe^{-x}\left|\cos\sigma x\right|dx\le\int\limits_0^\infty xe^{-x}dx=-\int\limits_0^\infty xde^{-x}=$$

$$=-xe^{-x}\Big|_0^\infty+\int\limits_0^\infty e^{-x}dx=1<\infty$$

4. $\exists g(x)\in L_1(\mathbb{R})$ כך ש

$$\left|\frac{df}{d\sigma}(x,\sigma)\right|\le g(x),\forall x\in[0,\infty],\forall\sigma\in\mathbb{R}\Rightarrow\left|\frac{df}{d\sigma}(x,\sigma)\right|=xe^{-x}\left|\cos\sigma x\right|\le$$

$$\le xe^{-x}:=g(x)$$

$\Leftarrow$ הפונקציה $J(\sigma)$ בעלת נגזרת $J'(\sigma)$ $\forall\sigma\in\mathbb{R}$, כך ש:

$$J'(\sigma)=\int\limits_0^\infty e^{-x}(\sin\sigma x)'_\sigma dx=\int\limits_0^\infty xe^{-x}\cos\sigma x dx=S(\sigma)$$

נשאר לחשב את $J(\sigma)$:

$$J(\sigma)=\int_0^\infty e^{-x}\sin\sigma x dx=-\int_0^\infty \sin\sigma x de^{-x}=\underbrace{-\sin\sigma x e^{-x}\Big|_0^\infty}_{=0}+$$

$$+\sigma\int_0^\infty e^{-x}\cos\sigma x dx=-\sigma\int_0^\infty \cos\sigma x de^{-x}=-\sigma e^{-x}\cos\sigma x\Big|_0^\infty-$$

$$-\sigma^2\int_0^\infty e^{-x}\sin\sigma x dx=\sigma-\sigma^2 J(\sigma)\Rightarrow$$

$$J(\sigma)=\sigma-\sigma^2 J(\sigma)\Rightarrow\boxed{J(\sigma)=\frac{\sigma}{1+\sigma^2}}\Rightarrow$$

$$S(\sigma)=\frac{d}{d\sigma}\frac{\sigma}{1+\sigma^2}=\frac{1+\sigma^2-2\sigma\cdot\sigma}{\left(1+\sigma^2\right)^2}=\frac{1-\sigma^2}{\left(1+\sigma^2\right)^2}\Rightarrow$$

$$\boxed{F(\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}S(\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\sigma^2}{\left(1+\sigma^2\right)^2}}$$

תרגיל 5:

מצא את התמרת הפורייה של הפונקציה:

$$f(x)=e^{-x^2/2},\ \ x\in\mathbb{R}$$

פתרון:

ברור ש $f\in L_1(\mathbb{R})$, מכיוון ש

$$\|f\|_1=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}dx=\begin{bmatrix}x=\sqrt{2}t\\ dx=\sqrt{2}dt\end{bmatrix}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}d\left(\sqrt{2}t\right)=\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=$$

$$=\begin{bmatrix}\text{Euler-Poisson's}\\ \text{integral equals }\sqrt{\pi}\end{bmatrix}=\sqrt{2\pi}<\infty$$

זאת אומרת, קיימת התמרת פורייה:

$$F(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{i\sigma x}dx,\ \ \sigma\in\mathbb{R}$$

נניח כי ניתן להפעיל על $F(\sigma)$ את כלל לייבניץ, אזי:

$$F'(\sigma)=\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{i\sigma x}dx\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\sigma}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}e^{i\sigma x}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}ixe^{i\sigma x}dx=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}e^{i\sigma x}dx$$

נפתח את הביטוי המתקבל בחלקים על מנת להגיע מ $F'(\sigma)$ לפונקציה המקורית $F(\sigma)$, ובכך להרכיב משוואה דיפרנציאלית עבור $F(\sigma)$

$$F'(\sigma)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}e^{i\sigma x}dx=-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x}de^{-\frac{x^2}{2}}=$$

$$=\underbrace{-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}e^{i\sigma x}e^{-\frac{x^2}{2}}}_{=0}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}+\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}i\sigma e^{i\sigma x}dx=$$

$$=\frac{i^2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{i\sigma x}dx=-\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{i\sigma x}dx=-\sigma F(\sigma)$$

$$\Rightarrow F'(\sigma)=-\sigma\cdot F(\sigma)\Rightarrow\frac{F'(\sigma)}{F(\sigma)}=-\sigma\Rightarrow\ln\frac{F(\sigma)}{F(0)}=$$

$$=\int_0^{\sigma}\frac{F'(s)}{F(s)}ds=-\int_0^{\sigma} sds=-\frac{\sigma^2}{2}\Rightarrow F(\sigma)=F(0)e^{-\frac{\sigma^2}{2}}$$

אבל:

$$F(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{i\sigma x}dx\Bigg|_{\sigma=0}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx}_{\sqrt{2\pi},as\ above}=1$$

$$\Rightarrow F(\sigma)=e^{-\frac{\sigma^2}{2}}\Rightarrow\boxed{F(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{i\sigma x}dx=e^{-\frac{\sigma^2}{2}}}$$

ניתן לבדוק את השוויון:

$$\frac{d}{d\sigma}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\sigma)dx\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\sigma}f(x,\sigma)dx,\ \ f(x,\sigma)=e^{-\frac{x^2}{2}}e^{i\sigma x}$$

נשתמש במשפט ארצלה (הרצאה 1, עמוד 3)

1. $\forall\sigma\in\mathbb{R}$ קיים האינטגרל (במובן של רימן):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x,\sigma)\right|d\sigma<\infty\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-\frac{x^2}{2}}e^{i\sigma x}\right|dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}<\infty$$

2. $\forall x,\sigma$ קיימת הנגזרת $f'_\sigma(x,\sigma)$ כך שמתקיים:

$$\frac{d}{d\sigma}\left|e^{-\frac{x^2}{2}}e^{i\sigma x}\right|=ixe^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{i\sigma x}$$

3. $\forall\sigma\in\mathbb{R}$ קיים האינטגרל (במובן של רימן):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f'_\sigma(x,\sigma)\right|dx\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\left|ixe^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{i\sigma x}\right|dx=\int_{-\infty}^{\infty}|x|e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\int_{0}^{\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=$$

$$=(-2)\int_0^\infty d\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)=(-2)e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_0^\infty=2<\infty$$

4. $\exists g(x)\in L_1(\mathbb{R})$ (במובן של רימן), כך ש $\left|f'_\sigma(x,\sigma)\right|\le g(x)$ לכל x ללא תלות ב $\sigma\in\mathbb{R}$ $\Leftarrow$

$$\left|f'_\sigma(x,\sigma)\right|=\left|ixe^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{i\sigma x}\right|=|x|e^{-\frac{x^2}{2}}:=g(x)\quad\forall x\in\mathbb{R},\quad\sigma\in\mathbb{R}$$

ב3 קיבלנו: $\|g\|_1=2<\infty$ $\Leftarrow$ כלל לייבניץ ניתן להפעלה.

4.שימוש בפונקציות מרוכבות למציאת התמרת פורייה

1.המשמעות העיקרית של האינטגרל הלא אמיתי

תחילה נזכר בהגדרת אינטגרל עם שני גבולות אינסופיים

הגדרה 4.1:

תהי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת על הקרן $[a,\infty)$ ועבור כל $\forall A \geq a$ אינטגרבילית ב $[a,A]$ (במובן של רימן), כלומר $\exists \int_a^A f(t)dt, \ \ \forall A > a$.

אז הגבול $\lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx$ (סופי או אינסופי) נקרא האינטגרל של הפונקציה $f(x)$ בקטע (a,∞) ומגדירים:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx \quad (4.1)$$

אם הגבול (4.1) קיים וסופי, אז נאמר שהאינטגרל (4.1) מתכנס. אם הגבול (4.1) לא קיים או אינסופי, אז נאמר שהאינטגרל (4.1) מתבדר.

בצורה דומה מוגדר האינטגרל $\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{A'\to\infty} \int_{A'}^a f(x)dx$

בנוסף, האינטגרל $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ מוגדר כמו גבול כפול

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\substack{A\to\infty \\ A'\to\infty}} \int_{A'}^A f(x)dx \quad (4.2)$$

אם כך, האינטגרל (4.2) קיים, אם קיימים ללא תלות בבחירת נקודה a, שני האינטגרלים

בו זמנית: $\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx\right) \quad \int_{-\infty}^{a} f(x)dx,\ \int_{a}^{\infty} f(x)dx$

אחרת האינטגרל (4.2) לא קיים.

הגדרה 4.2:

תהי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת ב $\mathbb{R}$ וגם $f(x)\in L_1^{loc}(\mathbb{R})$. נאמר ש הפונקציה $f(x)$

אינטגרבילית לפי קושי, אם קיים הגבול $(4.3) \quad \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx$

הגבול (4.3) יקרא המשמעות העיקרית (Valerie Principle – V.P) של האינטגרל הלא אמיתי של $f(x)$ במובן של קושי ויסומן

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

מהגדרת המשמעות העיקרית נובע:

1. אם האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ קיים במובן הרגיל, אז הוא קיים גם במובן קושי

ושניהם שווים: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, אם קיים $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

2. אם $f(x)$ נתונה ב $(-\infty,\infty)$, $f(x)\in L_1^{loc}(\mathbb{R})$

והפונקציה $f(x)$ אי זוגית, אזי $V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0$.

אם $f(x)$ זוגית אז $V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)dx$.

תרגיל:

מצא משמעות עיקרית: $V.P.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx$

פתרון:

מתקיים:

$$\frac{1+x}{1+x^2}=\underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{even\ function}+\underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{odd\ function}\Rightarrow V.P.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx=2\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\arctan x\Big|_0^{\infty}=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$$

נשים לב, שהאינטגרל $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx$ לא קיים, כיוון ש:

$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\lim\limits_{\substack{A\to\infty\\A'\to\infty}}\int\limits_{A'}^{A}\frac{x}{1+x^2}dx=\lim\limits_{\substack{A\to\infty\\A'\to\infty}}\ln\frac{1+A^2}{1+A'^2}$ אך הגבול האחרון לא קיים עבור כל בחירה של A,A'.

תרגיל:

תהי $Q(x)=\begin{cases}x\ , & |x|\le 1\\ \frac{1}{x}\ , & |x|\ge 1\end{cases}$ ברור ש $Q(x)$ פונקציה אי זוגית $\left(Q(x)=-Q(-x)\right)\Leftarrow$

$V.P.\int\limits_{-\infty}^{\infty}Q(x)dx=0$ בו זמנית האינטגרל $\int\limits_{-\infty}^{\infty}Q(x)dx$ מתבדר, כיוון ש

$$\int\limits_{-\infty}^{0}Q(x)dx=\int\limits_{0}^{\infty}Q(x)dx=\infty$$

2.פונקציות רגולריות בתחום

הגדרה 4.3:

נאמר שבתחום D במרחב המרוכבים $XOiY$ מוגדרת פונקציה מרוכבת $W=f(z)$,
אם $\forall z\in D$ ערכי הפונקציה $W=f(z)$ הם מספרים מרוכבים.

הגדרה 4.4:

תהי $f(z)$ מוגדרת בעיגול כלשהו $\left|z-a\right|<\rho,\ \ a\neq\infty,\ \ \rho>0$ וניתנת להצגה כטור:

$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ שמתכנס בעיגול הנ"ל.

אז נאמר שהפונקציה $f(z)$ *רגולרית בנקודה* $z=a$.

הגדרה 4.5:

הפונקציה $f(z)$, $z\in D$ נקראת *רגולרית בתחום* D, אם הפונקציה רגולרית בכל נקודה בתחום D.

הגדרה 4.6:

תהי הפונקציה $f(z)$ רגולרית בטבעת $0<\left|z-a\right|<\rho,\ \ \rho>0,\ \ a\neq\infty$ אך לא רגולרית בנקודה $z=a$. אז הנקודה $z=a$ נקראת *נקודה מבודדת* של $f(z)$.

<u>מיון:</u>

קיימים בסך הכול שלושה סוגים של נקודות מבודדות. מבחינים ביניהן לפי התנהגות $f(z)$ עבור $z\to a$.

1. נקודה *סליקה*: $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ קיים וסופי.
2. נקודת *קוטב*: $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$

3. נקודה *עיקרית*: $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ לא קיים.

אנו נתייחס רק לנקודות מסוג 2 – קטבים.

משפט 4.7:

נקודה מבודדת $z=a\neq\infty$ הינה קוטב של הפונקציה $f(z)$ אם ורק אם קיים $m\geq 1$ (שלם) כך ש $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=A\neq 0$. המספר m נקרא *סדר הקוטב*.

משפט 4.8:

תהי הפונקציה $f(z)$ רגולרית בטבעת $0<\left|z-a\right|<\rho,\ \ \rho>0,\ \ a\neq\infty$ ולא רגולרית בנקודה $z=a$ (זאת אומרת - a נקודה מבודדת של הפונקציה $f(z)$). אז הנקודה $z=a$ הינה קוטב מסדר $m\geq 1$ $\Leftrightarrow$ $\exists\rho>0$ כך שבטבעת $0<\left|z-a\right|<\rho$ עבור הפונקציה $f(z)$ קיים פיתוח לורן:

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{\left(z-a\right)^m}+\frac{c_{-m+1}}{\left(z-a\right)^{m-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}+\sum_{m=0}^{\infty}c_m\left(z-a\right)^m \quad (4.4)$$

כאשר $c_{-m}\neq 0$.

הגדרה 4.9 (של המרצה):

תהי נקודה מבודדת $z=a$, $a\neq\infty$ קוטב מסדר $m\geq 1$. המקדם c_{-1} בפיתוח (4.4) נקרא שארית הפונקציה $f(z)$ בנקודה $z=a$ ומסומן: $\operatorname*{Res}\limits_{z=a} f(z) \overset{def}{=} c_{-1}$.

משפט 4.10:

אם הנקודה $z=a$ - קוטב מסדר $m\geq 1$ של הפונקציה $f(z)$. אזי:

$$c_{-1}=\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right] \quad (4.5)$$

בפרט:

א. אם $m=1 \Leftarrow$ $c_{-1}=\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$

ב. אם $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ כאשר:

1. $\varphi(z)$ פונקציה רגולרית ב $z=a$, $\varphi(a)\neq 0$
2. $\psi(z)$ פונקציה רגולרית ב $z=a$, $\psi(z)\neq 0$, $\psi'(z)\neq 0$

$$\Leftarrow \quad c_{-1}=\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

תרגיל:

תהיה הפונקציה $f(z)$ מהצורה $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$

הפונקציה בעלת נקודות מבודדות מסוג 2(קטבים).

$z=1$ - קוטב מסדר $m=1$ (סיווג 2 + משפט 4.7)

$z=2$ - קוטב מסדר $m=2$ (סיווג 2+ משפט 4.7) $\Leftarrow$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}=\lim_{z\to 1}\frac{z}{(z-2)^2}=1$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z)=\lim_{z\to 2}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z-2)^2\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}\right]=$$

$$=\lim_{z\to 2}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)=\left(\frac{z}{z-1}\right)'\Bigg|_{z=2}=\frac{1\cdot(z-1)-z}{(z-1)^2}=-1$$

המשפטיים העיקריים בשבילנו הם:

משפט 4.11:

תהי נתונה הפונקציה $f(z)$ בחצי המישור $\operatorname{Im} z\geq 0$. אם התנאים הבאים מתקיימים:

1. הפונקציה $f(z)$ רגולרית בתחום $\operatorname{Im} z\geq 0$ לא כולל מספר סופי של קטבים $z_1,z_2,\ldots,z_n$.
2. $\operatorname{Im} z_k>0 \quad k=1..n$
3. הפונקציה $f(z)$ רציפה בתחום $\operatorname{Im} z\geq 0$, $|z|\geq R_0$
4. $M(R)\to\infty$ עבור $R\to\infty$, כאשר $M(R)=\max\limits_{z=\mathrm{Re}^{i\varphi},0\leq\varphi\leq\pi}|f(z)|$
5. $\boxed{\alpha>0}$

אזי $V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx$ קיים ושווה ל:

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\left(f(z)e^{i\alpha z}\right)$$

במשפט הבא שינוי מיקום הנקודות המבודדות משפיע על החישוב של אינטגרל קושי.

משפט 4.12 (משפט דומה ל 4.11 , חובר על ידי המרצה)

תהי נתונה הפונקציה $f(z)$ בחצי המישור $\operatorname{Im} z \le 0$.

אם מתקיימים התנאים:

1. פונקציה $f(z)$ רגולארית בתחום $\operatorname{Im} z \le 0$, חוץ ממספר סופי של קטבים $z_1, z_2, \dots, z_n$.
2. $\operatorname{Im} z_k < 0 \quad k = 1..n$
3. הפונקציה $f(z)$ רציפה בתחום $\operatorname{Im} z \le 0$, $|z| \ge R_0$ בכל מקום,חוץ מהנקודות $z_1, z_2, \dots, z_n$.
4. $M(R) \to \infty$ עבור $R \to \infty$, כאשר $M(R) = \max\limits_{z = \operatorname{Re}^{i\varphi}, \pi \le \varphi \le 2\pi} |f(z)|$
5. $\boxed{\alpha > 0}$

אזי $V.P.\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx$ קיים שווה ל

$$V.P.\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}\underset{z=z_k}{s}\left(f(z) e^{i\alpha z}\right)$$

רעיון ההוכחה: $\int\limits_{R}^{-R} = 2\pi i \sum \Rightarrow \int\limits_{R}^{-R} + \int\limits_{c_R} = 2\pi i \sum$.

נצטרך עוד שתי טענות.

משפט 4.13:

תהי הפונקציה $f(z)$:

1. רגולרית בתחום $\operatorname{Im} z \geq 0$ חוץ ממספר סופי של נקודות מבודדות $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (מספיק לנו קטבים), כאשר $k=1..n$ $\operatorname{Im} z_k > 0$.
2. $\exists\ \delta>0,\ \mathrm{R}_0 > 0$ ו-$M \in (0,\infty)$ כך ש- $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$ אם $|z| \geq R_0,\ \operatorname{Im} \mathrm{z} \geq 0$.

אזי: $$V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

משפט 4.14:

תהי הפונקציה $f(z)$:

1. רגולארית בתחום $\operatorname{Im} z \leq 0$ חוץ ממספר סופי של נקודות מבודדות $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (מספיק לנו קטבים), כאשר $k=1..n$ $\operatorname{Im} z_k < 0$.
2. $\exists\ \delta>0,\ \mathrm{R}_0 > 0$ ו-$M \in (0,\infty)$ כך ש- $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$ אם $|z| \geq R_0,\ \operatorname{Im} \mathrm{z} \leq 0$.

אזי:

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

תרגיל:

מצא את התמרת הפורייה של הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2+a^2}$, $\mathrm{a>0}$, $\mathrm{x}\in\mathrm{R}$.

פתרון: ברור ש- $f\in L_1(R)$, כיוון ש-

$$\|f\|_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{\pi}{a}<\infty$$

בחישוב של התמרת הפורייה:

$$F(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\sigma x}}{x^2+a^2}dx,\ \ \sigma\in\mathrm{R}$$

נחקור בנפרד את המקרים הבאים: 1. $\sigma<0$, 2. $\sigma=0$, 3. $\sigma>0$.

<u>מקרה 1:</u> $\sigma<0$

יש לנו אינטגרל מהסוג:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cdot e^{i\sigma x}dx,\quad \sigma<0\quad \left(f(x)=\frac{1}{x^2+a^2}\right)$$

$\Leftarrow$ נשתמש במשפט 4.12

1. $z\in \mathrm{Im}\, z\le 0$, $\quad f(z):=\frac{1}{z^2+a^2}\ \Leftarrow\ f(x)$ רגולרית בכל מקום חוץ

מנקודה z כך ש:

$$\begin{Bmatrix} z^2+a^2=0 \\ \mathrm{Im}\, z\le 0\end{Bmatrix}\Leftarrow\begin{Bmatrix} z_{1,2}=\pm ia \\ \mathrm{Im}\, z_{1,2}\le 0\end{Bmatrix}\Leftarrow$$ קוטב מסדר ראשון ב z_1

$$\boxed{z_1 = -ia, \qquad \operatorname{Im} z_1 = -a < 0}$$

2. $z_1 = -ia; \quad \operatorname{Im} z_1 = -a < 0$

3. פונקציה $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + a^2}$ רציפה בתחום $\operatorname{Im} z \le 0$,
בכל מקום חוץ מ $z = z_1 = -ia$ $|z| \ge R_0 > 0$

4.

$$M(R) = \max_{z = R\cdot e^{i\varphi},\ \pi \le \varphi \le 2\pi} |f(z)| = \max_{z = R\cdot e^{i\varphi},\ \pi \le \varphi \le 2\pi} \frac{1}{z^2 + a^2} \le$$

$$\le \begin{bmatrix} |a+b| = |a-(-b)| \ge ||a| - |b|| \Rightarrow \\ |z^2 + a^2| \ge ||z|^2 - |a|^2| = |z = R\cdot e^{i\varphi}| = |R^2 - a^2| \end{bmatrix} \le$$

$$\le \frac{1}{R^2 - a^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

5. $\boxed{\sigma < 0} \Leftarrow$

$$V.P.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\sigma x}dx}{x^2+a^2} = -2\pi i\cdot \underset{z=-ia}{res}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{i\sigma z}}{z^2+a^2}\right) =$$

$$= -\sqrt{2\pi}\cdot i\cdot \lim_{z\to -ia}\left[\left(z-(-ia)\right)\cdot\frac{e^{i\sigma z}}{(z-ia)\cdot(z+ia)}\right] =$$

$$= -\sqrt{2\pi}\cdot i\cdot\left[\left.\frac{e^{i\sigma z}}{z-ia}\right|_{z=-ia}\right] = -\sqrt{2\pi}\cdot i\cdot\frac{e^{i\sigma(-ia)}}{-ia-ia} =$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\cdot e^{\sigma a} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{a}\cdot e^{-|\sigma|\cdot a},\quad \sigma<0$$

לכן, $F(\sigma)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-|\sigma|a}}{a}$ אם $\sigma<0$.

<u>מקרה 2:</u> $\sigma = 0$

$$\Leftarrow F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}$$

האינטגרל שלנו מהצורה:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,\quad \mathrm{f(x)}=\frac{1}{x^2+a^2}$$

בכדי להתאמן על ניסוח פורמאלי (האינטגרל אלמנטארי) נשתמש במשפט השארית (משפט 4.14).

1. הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2+a^2}$ רגולרית בתחום $\mathrm{Im}\, z\le 0$, בכל מקום חוץ מ-

$\mathrm{Im}\ z_1 = -a < 0$, $z_1 = -ia$ (קטבים מסדר ראשון).

.2

$$\left|f(z)\right|=\frac{1}{\left|z^2+a^2\right|}\le\frac{1}{\left|\left|z\right|^2+\left|a\right|^2\right|}\le\left\|z\right|\ge R_0\ge 2a\right|\le\frac{1}{\left|z\right|^2}\frac{1}{\left(1-\frac{\left|a\right|^2}{R_0^{\ 2}}\right)}\le\frac{M}{\left|z\right|^2}$$

אם

$$.\left|z\right|\ge R_0=2a,\ \operatorname{Im} z\le 0$$

ולכן,

$$V.P.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=-2\pi i\cdot\underset{z=-ia}{\operatorname{Res}}f(z)=-2\pi i\cdot\underset{z=-ia}{\operatorname{Res}}\frac{1}{z^2+a^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=$$

$$=-\sqrt{2\pi}\cdot i\cdot\lim_{z\to -ia}\left[(z-(-ia)\frac{1}{(z-ia)(z+ia)}\right]=-\sqrt{2\pi}\cdot i\frac{1}{-2ia}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{a}\Rightarrow$$

$$F(0)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{a}$$

<u>מקרה 3:</u> $\sigma>0$.

האינטגרל שלנו מהצורה:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\alpha x}dx,\ \sigma>0\ (\mathrm{f(x)}=\frac{1}{x^2+a^2}$$

$\Leftarrow$ נשתמש במשפט 4.11

.1 $z\in\operatorname{Im} z\le 0$ $\quad f(z):=\frac{1}{z^2+a^2},\quad f(x)\Leftarrow$ רגולרית בכל מקום חוץ

מבנקודה z כך ש:

$$\left\{\begin{matrix} z^2 + a^2 = 0 \\ \operatorname{Im} z \le 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} z_{1,2} = \pm ia \\ \operatorname{Im} z_{1,2} \le 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ קוטב מסדר ראשון ב z_2

$$\boxed{z_2 = ia, \qquad \operatorname{Im} z_2 = a > 0}$$

2. $z_2 = ia; \quad \operatorname{Im} z_2 = a > 0$

3. הפונקציה $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + a^2}$ רציפה בתחום $\operatorname{Im} z \ge 0$,
בכל מקום $|z| \ge R_0 > 0$ חוץ מ $z = z_2 = ia$

4.

$$M(R) = \max_{z=R\cdot e^{i\varphi},\ 0\le\varphi\le\pi} |f(z)| = \max_{z=R\cdot e^{i\varphi},\ 0\le\varphi\le\pi} \frac{1}{|z^2 + a^2|} \le$$

$$\le \left[\begin{matrix} |a+b| \ge ||a| - |b|| \Rightarrow \\ |z^2 + a^2| \ge ||z|^2 - a^2| \underset{|z=R\cdot e^{i\varphi}|}{=} |R^2 - a^2| \end{matrix}\right] \le$$

$$\le \frac{1}{R^2 - a^2} \underset{R\to\infty}{\to} 0$$

$$\Rightarrow V.P.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\sigma x}dx}{x^2+a^2}=2\pi i\cdot \operatorname*{Res}_{z=ia}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{i\sigma z}}{z^2+a^2}\right)=$$

$$=\sqrt{2\pi}\cdot i\cdot\lim_{z\to ia}\left[\left(z-ia\right)\cdot\frac{e^{i\sigma z}}{(z-ia)\cdot(z+ia)}\right]=$$

$$=\sqrt{2\pi}\cdot i\cdot\frac{e^{i\sigma(ia)}}{2ia}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-\sigma a}}{a}=\boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-|\sigma|a}}{a}}\Rightarrow$$

התשובה הסופית:

$$F(\sigma)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-|\sigma|a}}{a},\ \sigma\in R$$