תרגיל בסיסים ומרחבים יסודיים

19 ביוני 2016

1. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $A,B\subset V$. הוכח או הפרך:
א. $span(A\cup B)=span(A)\cup span(B)$
ב. $span(A\cap B)=span(A)\cap span(B)$

פתרון:

א. הפרכה: $span\left(A\cup B\right)$ הוא תת מרחב. בעוד $span(A)\cup span(B)$ לא בהכרח תת מרחב.
דוג' נגדית: $B=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ אזי $span(A)\cup span(B)$ אינו תת מרחב.
ב. הפרכה: $B=\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right)$ $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ אזי $span(A)\cap span(B)=span\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}\right)$ בעוד $span\left(A\cap B\right)=\emptyset$.

2. יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ונניח כי $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס של V. הוכיחו או הפריכו:
א. $B'=\{v_1+v_2,v_2,v_3,v_4,\ldots,v_n\}$ בסיס של V.
ב. $B'=\{\alpha v_1,v_3,v_4,\ldots,v_n\}$ בסיס של V.

פתרון:

א. $v_1,v_2,\ldots,v_n$ בתל כי הם איברים בבסיס B, נניח כי v_1+v_2 ת"ל ב־$v_2,\ldots,v_n$
אזי $v_1+v_2=\sum\limits_{i=2}^{n}\alpha_i v_i$ ולכן
$v_1=\left(\alpha_2-1\right)v_2\sum\limits_{i=3}^{n}\alpha_i v_i$ לכן v_1 ת"ל בשאר וקטורי הבסיס וזו סתירה לכן
$v_1\in span\left(B'\right)$ (כי $v_1=v_1+v_2-v_2$) לכן
$B\subseteq span\left(B'\right)$ ולכן לפי טענה שהוכחנו בשיעור מתקיים

$$V = span\left(B\right)\subseteq span\left(B'\right)\subseteq V$$

בסה"כ הוכחנו B' פורש את V. $\#B=\#B'$ ולפי משפט השלישי חינם B' הוא בסיס.

ב. באותה צורה כמו סעיף א' מוכיחים את הטענה.

3. מצאו את שלושת המרחבים היסודיים של המטריצה:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ -2 & -3 & 0 & -3 & -5 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

פתרון:

נדרג את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ -2 & -3 & 0 & -3 & -5 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן לפי מה שלמדנו בכיתה: מרחב השורות הוא מרחב השורות של המטריצה המדורגת

$$B_{R(A)}=\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

העמודות של A המתאימות לעמודות עם איבר מובי במטריצה המדורגת מהוות בסיס למרחב השורות של A. $B_{C(A)}=\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$.

מרחב האפס של A הוא מרחב האפס של המטריצה המדורגת. הפיתרון של המערכת $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=0$ נציב פרמטרים במקום המשתנים החופשים $x_2=t,\ x_4=s,\ x_5=l$ ומתקיים $x_3=-s$, $x_1=\frac{-3t-3s-5l}{2}$

$$N(A)=\left\{\begin{pmatrix} \frac{-3t-3s-5l}{2} \\ t \\ -s \\ s \\ l \end{pmatrix}\right\}=\left\{t\begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+l\begin{pmatrix} \frac{-5}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ולכן $B_{N(A)}=\left\{\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. (לבדיקה שצדקנו אפשר לבדוק כי אכן $B_{N(A)}\perp B_{R(A)}$)

4. בכל אחד מהסעיפים מצאו מטריצה A המקיימת את התנאים או הוכיחו שלא קיימת מטריצה כזו:

א. מרחב העמודות מכיל את $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ומרחב השורות מכיל את $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right\}$.

ב. למרחב העמודות בסיס $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$ ומרחב האפס נפרש ע"י $\left\{\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$.

פתרון:

א. $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל והיא בסיס של $\mathbb{F}^2$ לכן במטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$, מרחב העמודות מקים את התנאים (ברור). מרחב השורות נפרש ע"י 2 טקטורים ולכן הוא $\mathbb{F}^2$.

ב. פתרון: נראה כי לא קיימת מטריצה כנ"ל נניח בשלילה כי קיימת A . כנ"ל, אזי לפי הנתון, אורך כל עמודה הוא 3, כלומר, מספר השורות במטריצה הוא 3. בדומה – כל וקטור במרחב האפס הוא באורך 3 לכן מספר העמודות במטריצה הוא 3. בסה"כ A היא מטריצה 3×3.

לפי משפט שראינו מתקיים: $dim\left(N\left(A\right)\right)+dim\left(C\left(A\right)\right)=n$ כאשר n הוא מספר העמודות. אצלינו $dim\left(N\left(A\right)\right)=dim\left(C\left(A\right)\right)=1$ ולכן צריך להתקיים $1+1=3$ וזו סתירה.