מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 11

1. יהי (M,d) מרחב מטרי . הוכיחו שהפונקציה $d: M \times M \to \mathbb{R}$ רציפה.

2. יהי (M,d) מרחב מטרי. תהי $F \subseteq M$ קבוצה קומפקטית ויהי $a \notin F$.
הוכיחו שקיימת נקודה $x_0 \in F$ כך ש-
$$d(a,x_0) = \inf_{x \in F} d(a,x)$$

<u>תזכורת-הגדרה.</u> יהיו σ, τ שתי טופולוגיות על הקבוצה X. אם $\tau \subset \sigma$, אז אומרים שטופולוגיה τ *חלשה* מטופולוגיה σ, או טופולוגיה σ *חזקה* מטופולוגיה τ.

3. יהיו $(X_1,\tau_1), \dots, (X_n,\tau_n)$ מרחבים טופולוגיים ו-p_i $(1 \le i \le n)$ ההטלות של **הקבוצה** $X_1 \times \dots \times X_n$ **לקבוצות** $X_1, \dots, X_n$.
הוכיחו שטופולוגית המכפלה החלשה ביותר מכל הטופולוגיות על הקבוצה $X_1 \times \dots \times X_n$ שעבורן כל הפונקציות
$$p_i: (X_1 \times \dots \times X_n, \tau) \to (X_i, \tau_i) \quad (1 \le i \le n)$$
רציפות.

4. יהיו $X_1, \dots, X_n$ ו-Y מרחבים טופולוגיים ו-p_i ($1 \leq i \leq n$) ההטלות של
המרחב $X_1 \times \dots \times X_n$ למרחבים $X_1, \dots, X_n$.
ויהיו $f_1: Y \to X_1, \dots, f_n: Y \to X_n$ פונקציות רציפות .
נגדיר פונקציה $\varphi: Y \to X_1 \times \dots \times X_n$ כך ש-$\varphi(y) = (f_1(y), \dots, f_n(y))$.
א') הוכיחו ש-φ $f_i = p_i \circ$ לכל i ($1 \leq i \leq n$).
ב') הוכיחו ש-φ רציפה.
ג') הוכיחו שאין פונקציה אחרת מ-Y ל-$X_1 \times \dots \times X_n$ שמקיימת א') ו- ב').

5. יהיו $X_1, \dots, X_n$ מרחבים טופולוגיים.
יהי Π מרחב טופולוגי עם n פונקציות $p_i: \Pi \to X_i$ רציפות כך שלכל מרחב טופולוגי Y ו- n פונקציות $f_1: Y \to X_1, \dots, f_n: Y \to X_n$
קיימת ויחידה פונקציה $\psi: Y \to \Pi$ בעלת שתי תכונות:
(1) היא רציפה,
(2) $f_i = p_i \circ \psi$ לכל i ($1 \leq i \leq n$).
הוכיחו ש-Π הומאומורפי ל-$X_1 \times \dots \times X_n$.