שיעור 12

הסתברות מותנית ואי תלות

לעיתים נרצה לדעת את ההסתברות במרחב מדגם מצומצם.

למשל:

נתבונן בתוצאות המשחקים של מכבי תל אביב:

ליגה ישראלית: 22 ניצחונות, 5 הפסדים.

יורוליג: 15 ניצחונות, 15 הפסדים.

יש הבדל אם מרחב המדגם הוא כל המשחקים, המשחקים בליגה הישראלית או המשחקים ביורוליג.

אם נתבונן במשחקים ביורוליג אז ההסתברות לבחור משחק באקראי שבו מכבי ניצחה היא $\frac{1}{2}$.

אם מרחב המדגם הוא כלל המשחקים של מכבי

אז ההסתברות לבחור משחק באקראי שבו מכבי ניצחה היא $\frac{37}{57}$.

הגדרה

ההסתברות המותנית של A בתנאי B מסומנת ב $P\left(A/B\right)$.

אם $P\left(B\right)>0$, אז $P\left(A/B\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}$.

דוגמא

נתבונן בדוגמא הקודמת. מרחב המדגם הוא כלל המשחקים של מכבי.

נשים לב שמרחב המדגם כולל 57 נקודות.

נסמן A להיות המאורע שכולל את כלל הניצחונות של מכבי, במאורע A יש 37 נקודות.

נסמן B להיות המאורע שכולל את כל המשחקים של מכבי באירופה, במאורע B יש 30 נקודות.

נשים לב שבמאורע $A\cap B$ יש 15 נקודות.

$$P\left(A/B\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}.$$

תרגיל

תא מכיל 10 כדורים לבנים, 5 צהובים ו 10 שחורים. מוציאים באקראי כדור מן התא, ומתברר שהוא אינו שחור. מהי ההסתברות שהכדור הזה צהוב.

פתרון

נסמן ב A את המאורע שהכדור שהוצא צהוב, ונסמן ב B^C את המאורע שהכדור שהוצא אינו שחור.

$$P\left(A/B^c\right)=\frac{P\left(A\cap B^c\right)}{P\left(B^c\right)}=\frac{5/25}{15/25}=\frac{1}{3}.$$

<u>תרגיל</u>

בבית ספר יסודי, לומדים בנים ובנות בשלוש שכבות בגיל: א', ב', ג'. ההסתברות לבחור מתוך כל תלמידי בית הספר, בן שלומד בכיתה א' היא 0.1. חמישית מהתלמידים בבית הספר הן בנות שלומדות בכיתה ב'. מתוך 200 תלמידי בית הספר, 60 לומדים בכיתה ב'.

נגדיר ארבעה מאורעות:

- המאורע A הוא "ללמוד בכיתה א". - המאורע B הוא "ללמוד בכיתה ב".
- המאורע C הוא "ללמוד בכיתה ג". - המאורע D הוא "להיות בן".

א. מצא מהו תחום הערכים האפשרי של ההסתברויות: .1 $P(D)$ .2 $P\left(A\cap\overline{D}\right)$.

ב. נתון: $P(C\cap D)=P\left(B\cap\overline{D}\right)$, $P\left(C/\overline{D}\right)=0.25$. חשבו את ההסתברויות הבאות:

.1 $P\left(A/\overline{D}\right)$. .2 $P(D/B)$ .3 $P\left(A\cup\overline{D}\right)$.

ג. אחת לשבוע, בוחרים באקראי תלמיד לנקות את הבמה לקראת שבת. חשבו את ההסתברות שבמשך שבועיים רצופים יבחר מישהו מכיתה א', ולאחר מכן במשך שלושה שבועות רצופים תיבחר בת כלשהי.

<u>פתרון</u>

א. ההסתברות לבחור בן שלומד בכיתה א היא: 0.1 ולכן $P(A\cap D)=0.1$.

חמישית מהתלמידים הם בנות שלומדות בכיתה ב ולכן $P\left(B\cap\overline{D}\right)=0.2$.

60 מתוך 200 לומדים בכיתה ב ולכן $P(B)=0.3$.

$$P\left(B\cap\overline{D}\right)+P(B\cap D)=P(B)\Rightarrow 0.2+P(B\cap D)=0.3\Rightarrow P(B\cap D)=0.1$$

נרשום את הנתונים בטבלה ונקבל

	A	B	C	
D	0.1	0.1		
$\overline{D}$		0.2		
		0.3		1

מכיוון ש

$$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)\Rightarrow P(D)=0.2+P(C\cap D)\Rightarrow 0.2\le P(D)$$

$$P\left(\overline{D}\right)=P\left(A\cap\overline{D}\right)+P\left(B\cap\overline{D}\right)+P\left(C\cap\overline{D}\right)\Rightarrow P\left(\overline{D}\right)=P\left(A\cap\overline{D}\right)+0.2+P\left(C\cap\overline{D}\right)\Rightarrow 0.2\le P\left(\overline{D}\right)$$

מכיוון ש $P(D)+P\left(\overline{D}\right)=1$ נקבל ש $P(D)\le 0.8$.

סה"כ תחום הערכים $0.2\le P(D)\le 0.8$.

$$P(A)+P(B)+P(C)=1\Rightarrow P(A)+0.3+P(C)=1\Rightarrow P(A)+P(C)=0.7\Rightarrow P(A)\le 0.7$$

$P(A\cap D)+P\left(A\cap\overline{D}\right)=P(A)\Rightarrow P\left(A\cap\overline{D}\right)=P(A)-0.1$ מכיוון ש $P(A)\le 0.7$ נקבל ש $P\left(A\cap\overline{D}\right)\le 0.6$.

הסתברות לא יכולה להיות שלילית ולכן $0\le P\left(A\cap\overline{D}\right)\le 0.6$.

ב. $P(C\cap D)=P(B\cap \overline{D})=0.2$, $P(C/\overline{D})=0.25 \Leftarrow \dfrac{P(C\cap \overline{D})}{P(\overline{D})}=0.25$.

	A	B	C	
D	0.1	0.1	0.2	0.4
$\overline{D}$	0.25	0.2	0.15	0.6
	0.35	0.3	0.35	1

$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D) \Rightarrow P(D)=0.4$.

$P(D)+P(\overline{D})=1 \Rightarrow P(\overline{D})=0.6$. $\dfrac{P(C\cap \overline{D})}{P(\overline{D})}=0.25 \Rightarrow P(C\cap \overline{D})=0.15$.

$P(\overline{D})=P(A\cap \overline{D})+P(B\cap \overline{D})+P(C\cap \overline{D}) \Rightarrow P(C\cap \overline{D})=0.25$.

$P(A\cap D)+P(A\cap \overline{D})=P(A) \Rightarrow P(A)=0.35$.

$P(A)+P(B)+P(C)=1 \Rightarrow P(C)=0.35$.

ב1.

$P(A/\overline{D})=\dfrac{P(A\cap \overline{D})}{P(\overline{D})}=\dfrac{0.25}{0.6}=\dfrac{5}{12}$.

ב2.

$P(D/B)=\dfrac{P(D\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0.1}{0.3}=\dfrac{1}{3}$.

ב3.

$P(A\cup \overline{D})=P(A)+P(\overline{D})-P(A\cap \overline{D})=0.7$.

ג.

ההסתברות לבחור פעמיים רצוף מישהו מכיתה א היא 0.4^2 .

ההסתברות לבחור במשך שלוש פעמים רצוף בת היא: 0.3^3 .

סה"כ ההסתברות היא $0.4^2\cdot 0.3^3=0.00432$.

<u>מאורעות בלתי תלויים</u>

המקרה ש $P(A)=P(A/B)$ נאמר שהמשתנים A ו B בלתי תלויים ונקבל ש

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

<u>דוגמא</u>

בוחרים באקראי קלף מתוך חפיסה רגילה של 52 קלפים. אם A הוא המאורע שהקלף הנבחר הוא אס, ו B הוא המאורע שהוא עלה, אז A ו B הם מאורעות בלתי תלויים.

$P(B)=\dfrac{13}{52}, P(A)=\dfrac{4}{52}, P(A\cap B)=\dfrac{1}{52} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

<u>תרגיל</u>

שני תלמידים ניגשים למבחן. ההסתברות שהתלמיד הראשון יעבור את המבחן היא 0.8 וההסתברות שהתלמיד השני יעבור את המבחן היא 0.7.

נסמן את המאורע: "התלמיד הראשון יעבור את המבחן" ב A , : "התלמיד השני יעבור את המבחן" ב B .

חשב את $P(A\cup B)$ אם נתון שהמאורעות A ו B בלתי תלויים.

<u>פתרון</u>

מכיוון שהמאורעות בלתי תלויים נקבל ש $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0.7\cdot 0.8=0.56$.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.8+0.7-0.56=0.94$.

משתנים מקריים

משתני מקרה הוא התאמה של ערך מספרי למאורע.

דוגמא 1

בהטלת שתי קוביות נסמן ב Y את סכום התוצאות המתקבלות בשתיהן.

עבור $Y=5$ נקבל את המאורע $\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$.

$P(\{Y=5\})=\frac{1}{9}$.

דוגמא 2

מוציאים באקראי (ללא החזרה) שלושה כדורים מתוך כד המכיל 3 כדורים לבנים, 3 כדורים אדומים ו 5 כדורים שחורים.

נניח שכל הוצאה של כדור לבן מזכה בשקל אחד, וכל בחירה של כדור אדום מחייבת בתשלום שקל אחד. מה ההסתברות לזכות בניסוי בסכום כסף?

פתרון

X הוא משתנה מקרי המסמן את סכום הזכייה.

הערכים האפשריים עבור X הם: $0,\pm1,\pm2,\pm3$.

נרצה לחשב את $P(\{X=1\})+P(\{X=2\})+P(\{X=3\})$.

עבור $X=1$ נקבל את המאורע: "כדור לבן ושני כדורים שחורים, שני כדורים לבנים וכדור אדום"

$P(\{X=1\})=3\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}+3\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{180}{990}+\frac{54}{990}=\frac{13}{55}$.

עבור $X=2$ נקבל את המאורע: "שני כדורים לבנים וכדור שחור"

$P(\{X=2\})=3\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{11}$.

עבור $X=3$ נקבל את המאורע: "שלושה כדורים לבנים"

$P(\{X=3\})=\frac{3}{11}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{165}$.

$P(\{X=1\})+P(\{X=2\})+P(\{X=3\})=\frac{1}{3}$.

פונקצית ההתפלגות המצטברת

פונקצית ההתפלגות המצטברת F של משתנה מקרי X מוגדרת לכל מספר ממשי b על ידי $F(b)=P(\{X\le b\})$.

תכונות פונקצית ההתפלגות המצטברת:

1. F היא פונקציה לא יורדת; כלומר, אם $a<b$ אז $F(a)\le F(b)$.
2. $\lim_{b\to\infty}F(b)=1$.
3. $\lim_{b\to-\infty}F(b)=0$.

דוגמא

בהטלת שתי קוביות נסמן ב Y את סכום התוצאות המתקבלות בשתיהן.

$F(5)=P(\{X=2\})+P(\{X=3\})+P(\{X=4\})+P(\{X=5\})=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}=\frac{5}{18}$.

משתנה מקרי בדיד

משתנה המקבל מספר סופי או בן מניה של ערכים נקרא משתנה מקרי בדיד.

מגדירים את פונקצית ההסתברות על ידי $p(a)=P(\{x=a\})$.

<u>דוגמא</u>

זורקים קובייה עד שמתקבל המספר 1.

מה ההסתברות שזרקנו את הקובייה:

א. פעם אחת.

ב. פעמיים.

ג. n פעמים.

ד. הראה שסכום ההסתברויות שווה ל 1.

<u>פתרון</u>

א. $P\left(\left\{X=1\right\}\right)=\frac{1}{6}$.

ב. בזריקה הראשונה לא מתקבלת הספרה 1 ובזריקה השנייה כן מתקבלת הספרה 1 .

$P\left(\left\{X=2\right\}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{36}$.

ג. ב $n-1$ הזריקות הראשונות לא מתקבלת הספרה 1. $P\left(\left\{X=n\right\}\right)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$.

ד. יש לחשב את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\left\{X=n\right\}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$. קיבלנו סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא $\frac{1}{6}$ והמנה שלה $\frac{5}{6}$. $S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{5}{6}}=1$.

<u>תוחלת</u>

אם X הוא משתנה מקרי בדיד שיש לו פונקצית הסתברות $p\left(x\right)$, אז התוחלת של X, המסומנת ב $E\left[X\right]$, מוגדרת ע"י $E\left[X\right]=\sum_{x:p(x)>0}xp\left(x\right)$.

משמעות התוחלת: ממוצע משוקלל של הערכים האפשריים ש X יכול לקבל, כאשר המשקל הניתן לכל ערך הוא ההסתברות ש X יקבל אותו.

<u>דוגמא</u>

שלושה אוטובוסים מסיעים 120 תלמידים לטיול שנתי.

באוטובוס אחד 36 תלמידים, בשני 40 תלמידים, ובשלישי 44 תלמידים.

בוחרים באקראי תלמיד אחד מתוך 120 התלמידים.

סמן ב - X את מספר הסטודנטים באוטובוס שבו נסע התלמיד, וחשב את $E\left[X\right]$.

$P\left(\left\{X=36\right\}\right)=\frac{36}{120},P\left(\left\{X=40\right\}\right)=\frac{40}{120},P\left(\left\{X=44\right\}\right)=\frac{44}{120}$.

$$E\left[X\right]=36\cdot P\left(\left\{X=36\right\}\right)+40\cdot P\left(\left\{X=40\right\}\right)=44\cdot P\left(\left\{X=44\right\}\right)=36\cdot\frac{36}{120}+40\cdot\frac{40}{120}+44\cdot\frac{44}{120}=40.2667$$

<u>תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי</u>

נניח שנתונה לנו פונקצית ההסתברות של משתנה מקרי בדיד X, ואנו רוצים לחשב את התוחלת של פונקציה כלשהי של X, נאמר $g\left(X\right)$.

$g(X)$ עצמה היא משתנה מקרי בדיד, יש לה פונקצית הסתברות, שאותה ניתן לקבל מפונקצית ההסתברות של X. לאחר חישוב פונקצית ההסתברות של $g(X)$ אנחנו יכולים לחשב את $E[g(X)]$ בעזרת הגדרת התוחלת.

<u>דוגמא</u>

נסמן ב- X משתנה מקרי בדיד, המקבל את הערכים $1, 0, -1$ בהסתברויות הבאות -

$P(\{X=-1\})=0.2, P(\{X=0\})=0.5, P(\{X=1\})=0.3$.

א. חשב את $E[X]$.

ב. חשב את $E[X^2]$.

<u>פתרון</u>

א. $E[X]=-1\cdot 0.2+0\cdot 0.5+1\cdot 0.3=0.1$.

ב. נסמן $g(X)=X^2$.

$$P(\{g(X)=1\})=P(\{X=1\})+P(\{X=-1\})=0.5$$

$$P(\{g(x)=0\})=P(\{X=0\})=0.5$$

$E[X^2]=1\cdot 0.5+0\cdot 0.5=0.5$.

<u>הערה</u>

נשים לב שבדוגמא הקודמת $E[X]\neq E[X^2]$.

<u>טענה</u>

אם X הוא משתנה מקרי בדיד, המקבל את הערכים $x_1, x_2, x_3, \ldots$ בהסתברויות $p(x_1), p(x_2), p(x_3), \ldots$ בהתאמה, אז לכל פונקציה ממשית g מתקיים

$E[g(X)]=\sum_i g(x_i)p(x_i)$.

בדוגמא הקודמת

$E[X^2]=(-1)^2\cdot 0.2+0^2\cdot 0.5+1^2\cdot 0.3=0.5$.

<u>מסקנה</u>

אם a ו b הם קבועים, אז $E[aX+b]=aE[X]+b$.

<u>הוכחה</u>

$$E[aX+b]=\sum_{x:p(x)>0}(ax+b)p(x)=a\sum_{x:p(x)>0}xp(x)+b\sum_{x:p(x)>0}p(x)=aE[X]+b.$$

<u>שונות</u>

מטרת השונות היא להעריך את ההשתנות האפשרית של ערכי X.

<u>הגדרה</u>

יהי X משתנה מקרי. השונות של X מוגדרת ע"י $V(X)=E\left[(X-E[X])^2\right]$.

<u>משפט</u>

$V(X)=E[X^2]-(E[X])^2$.

<u>דוגמא</u>

חשב את $V(X)$, אם X היא התוצאה המתקבלת בהטלת קובייה.

פתרון

$$E\left[X\right]=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$

$$E\left[X^2\right]=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{6}+5^2\cdot\frac{1}{6}+6^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$$

$$V\left(X\right)=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12}$$

סטיית תקן

השורש הריבועי של השונות נקרא סטיית התקן של X.

$S\left(X\right)=\sqrt{V\left(X\right)}$.

התפלגות בינומית

משתנה מקרי ברנולי

ניסוי מקרי שלו שתי תוצאות אפשריות:

"הצלחה" בהסתברות p או "כישלון" בהסתברות $1-p$, כאשר $0<p<1$, נקרא ניסוי ברנולי.

עבור משתנה מקרי X נגדיר $X=1$ עבור הצלחה ו $X=0$ עבור כשלון.

$p(0)=P\left(\{X=0\}\right)=1-p; p(1)=P\left(\{X=1\}\right)=p$.

משתנה X כנ"ל נקרא משתנה מקרי ברנולי.

דוגמא

נניח שבזריקת קובייה קבלת הספרה "1" מציינת הצלחה וקבלת ספרה שונה מ 1 מציינת כשלון.

במקרה זה $p=\frac{1}{6}$. עבור משתנה ברנולי X נקבל:

$$p(0)=P\left(\{X=0\}\right)=\frac{5}{6}; p(1)=P\left(\{X=1\}\right)=\frac{1}{6}$$

משתנה מקרי בינומי

נניח שעורכים n ניסויי ברנולי בלתי תלויים.

נניח שתוצאת כל אחד מהניסויים הנ"ל היא הצלחה בהסתברות p וכישלון בהסתברות $1-p$.

אם X הוא מספר ההצלחות שמתקבלות ב n הניסויים אז X הוא משתנה מקרי בינומי.

תרגיל

בזריקת קובייה שלוש פעמים חשב את פונקצית ההסתברות שמקבלת הספרה "1".

פתרון

המשתנה המקרי X מקבל את הערכים $0,1,2,3$.

$P\left(\{X=0\}\right)$ מציין את ההסתברות לקבל אפס פעמים את הספרה 1.

נסמן ב x את ההסתברות לא לקבל את הספרה "1" וב v את ההסתברות לקבל את הספרה "1"

<u>xxx</u> - ההסתברות המתקבלת היא $P\left(\{X=0\}\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^3$.

$P\left(\{X=1\}\right)$ מציין את ההסתברות לקבל בדיוק פעם אחת את הספרה 1.

<u>vxx</u> - ההסתברות המתקבלת היא $\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$. מספר הסידורים האפשריים הוא 3 ולכן

$P\left(\{X=1\}\right)=3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$.

$\underline{v}\underline{v}\underline{x}$ - ההסתברות המתקבלת היא $\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)$. מספר הסידורים האפשריים הוא 3 ולכן

$P\left(\{X=2\}\right)=3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)$.

$\underline{v}\underline{v}\underline{v}$ - ההסתברות המתקבלת היא $\left(\frac{1}{6}\right)^3$. מספר הסידורים האפשריים הוא 1 ולכן $P\left(\{X=3\}\right)=\left(\frac{1}{6}\right)^3$.

<u>הערה</u>

$\sum_{i=1}^{3}P\left(\{X=i\}\right)=\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{3-i}$.

נשים לב שלפי הבינום של ניוטון מתקיים $(a+b)^3=\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}a^ib^{3-i}$ ולכן

$\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{3-i}=\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)^3=1$.

<u>המקרה הכללי</u>

עורכים ניסויי ברנולי n פעמים, כאשר ההסתברות להצלחה היא p וההסתברות לכישלון $1-p$.

המשתנה המקרי X מציין את מספר ההצלחות בניסויי.

נחשב את $p\left(\{X=i\}\right)$.

$\underbrace{\underline{v}\underline{v}...\underline{v}}_{i\_times}\ \underbrace{\underline{x}\underline{x}...\underline{x}}_{n-i\_tines}$ ההסתברות למקרה הנ"ל היא $p^i\cdot(1-p)^{n-i}$.

מספר האפשרויות לסדר i v-ים ו $n-i$ x-ים בשורה הוא $\binom{n}{i}$.

$p\left(\{X=i\}\right)=\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i}$.

מהבינום של ניוטון נקבל ש $(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}$.

$\sum_{i=0}^{n}p\left(\{X=i\}\right)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i}=(p+1-p)^n=1$.

אם X הוא משתנה מקרי בינומי עבור ביצוע ניסויי ברנולי n פעמים עם הסתברות p להצלחה אז נאמר ש X הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים (n,p).

<u>תרגיל</u>

ידוע שב 90% מהמכוניות יש מזגן. בוחרים באקראי 5 מכוניות.

נסמן ב X את המשתנה המקרי שמציין את מספר המכוניות עם מזגן.

א. חשב את $P(X=3)$.

ב. חשב את $E[X]$.

ג. חשב את $E\left[X^2\right]$.

ד. חשב את $V(X)$.

<u>פתרון</u>

א. מהמקרה הכללי נקבל ש $p\left(\{X=i\}\right)=\binom{n}{i}\cdot p^{i}\cdot(1-p)^{n-i}$ ולכן

$p\left(\{X=3\}\right)=\binom{5}{3}\cdot 0.9^{3}\cdot 0.1^{2}=0.0729$.

ב.

$$E[X]=1\cdot P\left(\{X=1\}\right)+2\cdot P\left(\{X=2\}\right)+3\cdot P\left(\{X=3\}\right)+4\cdot P\left(\{X=4\}\right)+5\cdot P\left(\{X=5\}\right)=$$

$$=1\cdot\binom{5}{1}\cdot p^{1}\cdot(1-p)^{4}+2\cdot\binom{5}{2}\cdot p^{2}\cdot(1-p)^{3}+3\cdot\binom{5}{3}\cdot p^{3}\cdot(1-p)^{2}+$$

$$+4\cdot\binom{5}{4}\cdot p^{4}\cdot(1-p)^{1}+5\cdot\binom{5}{5}\cdot p^{5}\cdot(1-p)^{0}$$

נשים לב ש

$$i\cdot\binom{5}{i}=\frac{5!i}{i!\cdot(5-i)!}=\frac{5!}{(i-1)!(5-i)!}=5\cdot\frac{4!}{(i-1)!(5-i)!}=5\cdot\frac{4!}{(i-1)!\left(4-(i-1)\right)!}=5\cdot\binom{4}{i-1}$$

$$1\cdot\binom{5}{1}\cdot p^{1}\cdot(1-p)^{4}+2\cdot\binom{5}{2}\cdot p^{2}\cdot(1-p)^{3}+3\cdot\binom{5}{3}\cdot p^{3}\cdot(1-p)^{2}+$$

$$+4\cdot\binom{5}{4}\cdot p^{4}\cdot(1-p)^{1}+5\cdot\binom{5}{5}\cdot p^{5}\cdot(1-p)^{0}=$$

$$5\cdot\binom{4}{0}\cdot p^{1}\cdot(1-p)^{4}+5\cdot\binom{4}{1}\cdot p^{2}\cdot(1-p)^{3}+5\cdot\binom{4}{2}\cdot p^{3}\cdot(1-p)^{2}+$$

$$+5\cdot\binom{4}{3}\cdot p^{4}\cdot(1-p)^{1}+5\cdot\binom{4}{4}\cdot p^{5}\cdot(1-p)^{0}=$$

$$5p\cdot\left[\binom{4}{0}\cdot p^{0}\cdot(1-p)^{4}+\binom{4}{1}\cdot p^{1}\cdot(1-p)^{3}+\binom{4}{2}\cdot p^{2}\cdot(1-p)^{2}+\binom{4}{3}\cdot p^{3}\cdot(1-p)^{1}+\binom{4}{4}\cdot p^{4}\cdot(1-p)^{0}\right]$$

ראינו ש $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot p^{i}\cdot(1-p)^{n-i}=(p+1-p)^{n}=1$ ולכן

$$\binom{4}{0}\cdot p^{0}\cdot(1-p)^{4}+\binom{4}{1}\cdot p^{1}\cdot(1-p)^{3}+\binom{4}{2}\cdot p^{2}\cdot(1-p)^{2}+\binom{4}{3}\cdot p^{3}\cdot(1-p)^{1}+\binom{5}{4}\cdot p^{4}\cdot(1-p)^{0}=1$$

והתוחלת היא $5p=5\cdot 0.9=4.5$.

באופן כללי ניתן להראות באופן דומה שהתוחלת של משתנה בינומי X עם הפרמטרים (n,p) הוא np.

ג.

$$E\left[X^{2}\right]=1\cdot P\left(\{X=1\}\right)+4\cdot P\left(\{X=2\}\right)+9\cdot P\left(\{X=3\}\right)+16\cdot P\left(\{X=4\}\right)+25\cdot P\left(\{X=5\}\right)=$$

$$=1\cdot\binom{5}{1}\cdot p^{1}\cdot(1-p)^{4}+4\cdot\binom{5}{2}\cdot p^{2}\cdot(1-p)^{3}+9\cdot\binom{5}{3}\cdot p^{3}\cdot(1-p)^{2}+$$

$$+16\cdot\binom{5}{4}\cdot p^{4}\cdot(1-p)^{1}+25\cdot\binom{5}{5}\cdot p^{5}\cdot(1-p)^{0}$$

ראינו ש $i\cdot\binom{5}{i}=5\cdot\binom{4}{i-1}$

ולכן

$$1\cdot\binom{5}{1}\cdot p^1\cdot(1-p)^4+2\cdot2\cdot\binom{5}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^3+3\cdot3\cdot\binom{5}{3}\cdot p^3\cdot(1-p)^2+$$

$$+4\cdot4\cdot\binom{5}{4}\cdot p^4\cdot(1-p)^1+5\cdot5\cdot\binom{5}{5}\cdot p^5\cdot(1-p)^0=$$

$$5\cdot1\cdot\binom{4}{0}\cdot p^1\cdot(1-p)^4+5\cdot2\cdot\binom{4}{1}\cdot p^2\cdot(1-p)^3+5\cdot3\cdot\binom{4}{2}\cdot p^3\cdot(1-p)^2+$$

$$+5\cdot4\cdot\binom{4}{3}\cdot p^4\cdot(1-p)^1+5\cdot5\cdot\binom{4}{4}\cdot p^5\cdot(1-p)^0=$$

$$5p\cdot\left[1\cdot\binom{4}{0}\cdot p^0\cdot(1-p)^4+2\cdot\binom{4}{1}\cdot p^1\cdot(1-p)^3+3\cdot\binom{4}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^2+4\cdot\binom{4}{3}\cdot p^3\cdot(1-p)^1+5\cdot\binom{4}{4}\cdot p^4\cdot(1-p)^0\right]$$

נשאר לחשב את הסכום

$$\binom{4}{0}\cdot p^0\cdot(1-p)^4+2\cdot\binom{4}{1}\cdot p^1\cdot(1-p)^3+3\cdot\binom{4}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^2+4\cdot\binom{4}{3}\cdot p^3\cdot(1-p)^1+5\cdot\binom{4}{4}\cdot p^4\cdot(1-p)^0$$

נסמן את Y כמשתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים $(4,p)$ נשים לה שהסכום הנ"ל מייצג את $E[Y+1]$.

מהמקרה הכללי ניתן לראות ש $E[Y]=4p$.

ראינו ש $E[aX+b]=aE[X]+b$ ולכן $E[Y+1]=E[Y]+1=4p+1$.

קיבלנו ש $E\left[X^2\right]=5p\cdot(4p+1)$.

ד. $V(X)=E\left[X^2\right]-\left(E[X]\right)^2=5p(4p+1)-25p^2=5p-5p^2=5p(1-p)$

מכיוון ש $p=0.9$ נקבל ש $V(X)=5\cdot0.9\cdot0.1=0.45$.

באופן כללי ניתן להראות ש $V(X)=n\cdot p\cdot(1-p)$.

<u>תרגיל</u>

יוסי משחק עם חברו במשחק הכדורים.

בכד יש שני כדורים אדומים ושלושה כדורים שחורים.

יוסי בוחר כדור באקראי (לאחר הבחירה הוא מחזיר את הכדור לכד) אם הכדור אדום הוא מקבל חמישה שקלים ואם הכדור שחור הוא מפסיד שלושה שקלים.

יוסי שיחק את המשחק 40 פעמים.

מהי תוחלת הרווח של יוסי במשחק.

<u>פתרון</u>

נשים לב שההתפלגות היא בינומית עם פרמטרים $(40,0.4)$.

נסמן ב X את מספר הפעמים שיוסי הוציא כדור אדום.

מספר הפעמים שיוסי הוציא כדור שחור הוא $40-X$.

הרווח של יוסי $5X-3(100-X)=8X-300$. יש לחשב את $E[8X-300]$.

מכיוון ש $E[aX+b]=aE[X]+b$ נקבל ש $E[8X-300]=8E[X]-300$.

מכיוון שההתפלגות בינומית עם פרמטרים $(40,0.4)$ נקבל ש $E[X]=16$.

תוחלת הרווח של יוסי -172.