המחלקה למתמטיקה - אוניברסיטת בר-אילן

טופולוגיה – 88 - 222 05 – סמסטר ב' 30.08.18 תשע"ח מבחן מועד ב'
המרצה: מיכאל מגרל המתרגלים: תמר בר-און, אחיה בר-און

הנחיות:

- יש **לבחור 4 מתוך 5** שאלות. נא לסמן על דף ראשון פנימי מספר תרגיל **שלא בחרתם**.
- כל שאלה שווה 25 נקודות. שאלת הבונוס שווה 5 נקודות. הציון הסופי לא יעבור את 100.
- אין להשתמש בכל חומר עזר, טלפון נייד או מחשבון.
- משך הבחינה שלוש שעות. מותר לקחת דף זה בסוף המבחן.

השאלות:

1. א. נניח $X_1, X_2, \cdots, X_n$ מרחבים מטריזביליים. הוכיחו שמכפלה טופולוגית $\prod_{i=1}^{n} X_i$ גם מטריזבילית.

ב. הוכיחו שקיימת מכפלה טופולוגית אינסופית $X := \prod_{i\in I} X_i$ עם גורמים מטריזביליים $X_i \; \forall i \in I$ כך ש X לא מטריזבילי ובעלת תכונת T_4

2. א. יהיה (X,d) מרחב מטרי. הוכיחו שהפונקציה $d : X\times X \to \mathbb{R}$ היא רציפה.
ב. בהנחה נוספת ש (X,d) קומפקטי הוכיחו שקיימות $a,b\in X$ כך ש $diam(\mathrm{X}) = \mathrm{d}(a,\mathrm{b})$. תנו דוגמה נגדית אם (X,d) חסום כליל אבל לא קומפקטי.

3. א. הוכיחו את המשפט הבא: נניח X , Y מרחבים מטריזביליים ו $\mathrm{f} : X \to \mathrm{Y}$ פונקציה.
הוכיחו ש f רציפה אם ורק אם $\lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = \mathrm{f}(a)$ לכל סדרה מתכנסת x_n ב X.
ב. תנו דוגמה נגדית אם מדובר במרחב טופולוגי X לא מטריזבילי .

4. א. נניח X מרחב קומפקטי. הוכיחו: קיים שיכון טופולוגי של X לתוך הקוביה $[0,1]^n$ אם ורק אם קיים אוסף של n פונקציות רציפות $f_i : X \to \mathbb{R}$ $i\in\{1,\cdots,\mathrm{n}\}$ שמפריד נקודות (כלומר לכל $x\neq y$ קיימת $f_i : X\to\mathbb{R}$ כך ש $f_i(x)\neq f_i(y)$).
ב. הוכיחו שקיים מרחב ספרבילי האוסדורפי X עם תת מרחב Y לא ספרבילי.

5. א. הוכיחו את המשפט: תמונה רציפה של מרחב קומפקטי גם קומפקטי.
ב. נניח X, Y קשירים. הוכיחו שגם $X\times \mathrm{Y}$ קשיר.

<u>שאלת בונוס</u> (5 נקודות):
הוכיחו שבמרחב בנך $(l_\infty, ||.||_{\sup})$ של סדרות חסומות קיימת בו נקודה z וסביבה $U\in N(z)$ כך שלכל סביבה $V\in N(z)$ עם $V\subseteq U$ מתקיים: V לא קומפקטית.

בהצלחה !