תזכורת:

R חוג חילופי, $P \triangleleft R$ ראשוני אם $ab \in P \Leftarrow a \in P$ או $b \in P$
$(a,b \in R)$

טענה:

יהי R חוג חילופי, $P \triangleleft R$ אידיאל. התנאים הבאים שקולים:

א) P ראשוני

ב) R/P תחום שלמות

ג) יהיו $I,J \triangleleft R$. אם $IJ \leq P$ אזי $I \subseteq P$ או $J \subseteq P$

הוכחה:

(א) $\Leftrightarrow$ (ב) כפעם הקודמת

(א) $\Leftarrow$ (ג) נניח P ראשוני, $IJ \leq P$. נניח בשלילה כי $I \nsubseteq P$ וגם $J \nsubseteq P$. אזי
יהיו $i \in I, j \in J$ $(i,j \notin P)$ אבל $ij \in IJ \leq P$ בסתירה לראשוניות

(ג) $\Leftarrow$ (א) יהיו $ab \in P$. יהי $I=(a)$, $J=(b)$ אזי $IJ=(ab)$
$IJ \leq P \Leftarrow ab \in P$. לפי (ג) $a \in I \leq P$ או $b \in J \leq P$

הגדרה: יהי F שדה. קבוצה $X \subseteq \mathbb{F}^n$ נקראת אלגברית אם קיימים פולינומים
$f_1, f_2, \ldots, f_r \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$

כך ש-

$X = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{F}^n \mid f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0 \quad \text{לכל } 1 \leq i \leq r\}$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin x\} \subseteq \mathbb{R}^2$ לא אלגבריים

דוגמאות:

1) $\{(3,2)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ישנו הפולינומים $x-3$, $y-2$ (הפולינום: $(x-3)(y-2)$ לא עובד)

לכל $I \triangleleft \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$. יהי $V(I) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{F}^n \mid \forall f \in I : f(a_1, \ldots, a_n) = 0\}$

$X = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{F}^n \mid f_1(\ldots) = 0, \ldots, f_r(\ldots) = 0\} = V((f_1, \ldots, f_r)) = X$

$(f_1,\dots,f_r)$ אידאל הנוצר על ידי $f_1,\dots,f_r$

בהינתן קבוצה אלגברית $X \subset \mathbb{F}^n$ נגדיר אידאל

$$I(X)=\{f\in\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n] \mid f(a_1,\dots,a_n)=0 \ \text{לכל}\ (a_1,\dots,a_n)\in X\} \triangleleft \mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$$

$$V(x^3)=V(x)$$

הגדרה: אידאל $I \triangleleft R$ נקרא רדיקלי אם לכל $a\in R$, $n\in\mathbb{N}$, $a\in I \Leftarrow a^n\in I$

משפט האפסים של הילברט:

יהי $\mathbb{F}$ שדה סגור אלגברית (לדוגמא $\mathbb{F}=\mathbb{C}$). אזי יש התאמה חח"ע

$$\left\{\begin{matrix}\text{אידאלים}\\ \text{רדיקליים}\\ I\triangleleft \mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{קבוצות}\\ \text{אלגבריות}\\ \text{ב-}\mathbb{F}^n\end{matrix}\right\}$$

$$I \longrightarrow V(I)$$

$$I(X) \longleftarrow X$$

הערה: המשפט לא נכון אם $\mathbb{F}$ לא סגור אלגברית. לדוגמא $\mathbb{F}=\mathbb{R}$

$$I=(x^2+y^2=1) \Rightarrow \mathbb{R}^2 \supseteq V(I)=\emptyset=V(\mathbb{R}[x,y])$$

הגדרה: קבוצה אלגברית $X\subseteq\mathbb{F}^n$ נקראת אי-פריקה אם $X=X_1\cup X_2$, X_1,X_2 אלגבריות

$\Leftarrow X=X_1$ או $X=X_2$

דוגמאות:

1) $\{(3,2)\}\subseteq\mathbb{R}^2$ אי פריקה

2) $V(xy)=\underbrace{V(x)}_{\text{ציר } y}\cup \underbrace{V(y)}_{\text{ציר } x}$

3) $V(z-x^2-y^2)\subseteq\mathbb{R}^3$ אי פריק

נשים לב: $V(I+J)=V(I)\cap V(J)$, $V(IJ)=V(I)\cup V(J)$

תרגיל: טופולוגיה על $\mathbb{F}^n$. הקבוצות הסגורות הן הקבוצות האלגבריות, (טופ' זריצקי)

טענה:

$\mathbb{F}$ שדה, $X\subseteq\mathbb{F}^n$ קבוצה אלגברית. אזי X אי-פריקה $\iff$ $I(X)$ ראשוני

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח X אי-פריקה, $f,g\in\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$ כך ש $fg\in I(X)$. זה אומר שבכל נקודה

$g(a_1,\dots,a_n)=0$ או $f(a_1,\dots,a_n)=0 \Leftarrow (a_1,\dots,a_n)\in X$

כלומר,

$$X\subseteq V(fg)=V(f)\cup V(g)$$

$$X=X\cap V(fg)=\underbrace{(X\cap V(f))}_{\text{אלגברית}}\cup\underbrace{(X\cap V(g))}_{\text{אלגברית}}$$

אבל X אי-פריקה ולכן

$$X=X\cap V(f)\Rightarrow X\subseteq V(f)\Rightarrow f\in I(X)$$

או

$$X=X\cap V(g)\Rightarrow g\in I(X)$$

לכן, $I(X)$ ראשוני

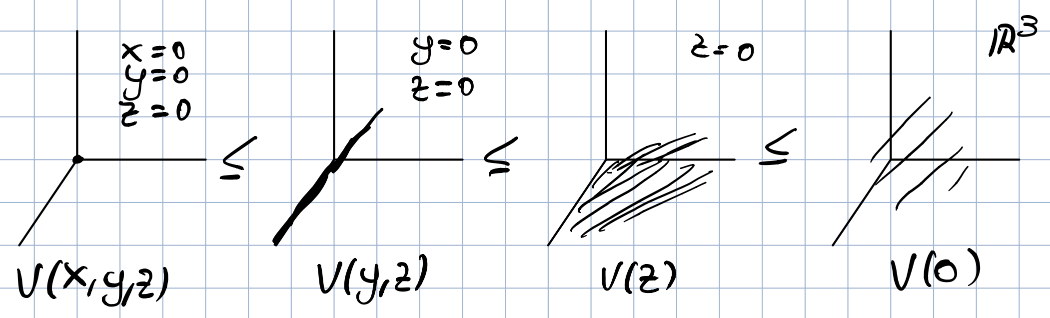
($\Rightarrow$) נניח $I(X)$ ראשוני. יהי $X=X_1\cup X_2$

$$\underbrace{I(X_1)I(X_2)}_{\text{כל פולינום כזה מתאפס בכל נק' גם של } X_1 \text{ וגם של } X_2}\subseteq I(X)$$

$X_1=X \Leftarrow X\subseteq X_1 \Leftarrow I(X_1)\subseteq I(X) \underset{\text{בה"כ}}{\Leftarrow}$ $I(X)$ ראשוני

$X_2=X \Leftarrow I(X_2)\subseteq I(X)$. לכן X אי פריקה.

שאלה: איך נתרגם את המושג הגיאומטרי של מימד לתורת החוגים?



כל הקבוצות הללו אי פריקות.

לדוגמא: המישור אי פריק כי $I(\text{מישור}) = (z)$

$$\mathbb{R}[x,y,z]/I \simeq \underbrace{\mathbb{R}[x,y]}_{\text{תחום שלמות}}$$

לכן I ראשוני

אכן, אם נתבונן בהומ' $\varphi:\mathbb{R}[x,y,z]\to\mathbb{R}[x,y]$

$f(x,y,z)\mapsto f(x,y,0)$

$\ker\varphi=(z)$, φ על. וממשפט האיזו' הראשון נקבל את הרצוי

הגדרה: קבוצה אלגברית אי-פריקה X נקראת n-מימדית. אם n הוא המספר המקסימלי כך שקיימת שרשרת של קבוצות אי פריקות

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_n = X$$

לכל $X\subseteq \mathbb{F}^n$ אלגברית נגדיר את חוג הקואורדינטות

$$A(X)=\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]/I(X)$$

תרגיל: ממשפט האיזו' הרביעי נותן התאמה

$$\left\{\begin{matrix}\text{אידיאלים}\\ L\trianglelefteq R/I\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{אידיאלים}\\ I\le J\trianglelefteq R\end{matrix}\right\}$$

הטלה טבעית $\varphi:R\to R/I$

$\varphi(J)\leftarrow J$

$L\mapsto\varphi(L)$

J ראשוני $\Longleftrightarrow$ L ראשוני

הגדרה: יהי R חוג חילופי. מימד קרול (krull) של R הינו המספר n הכי גדול כך שקיימת שרשרת של אידיאלים ראשוניים $P_0\subsetneq P_1\subsetneq\dots\subsetneq P_n$ (סימון $\operatorname{kdim} R$)

מימד של X = מימד קרול של $A(X)$

$X_0\subsetneq\dots\subsetneq X_n=X$ אי פריקות $\longleftrightarrow$ $I(X_n)\subsetneq\dots\subsetneq I(X_0)$ אידיאלים ראשוניים $\longleftrightarrow$ $(0)\le\dots\le I(X_0)/I(X_n)$

שרשרת של אידיאלים ראשוניים של

$$A(X)=\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]/I(X)$$

תזכורת: אידיאל ראשוני הוא אמיתי (לפי ההגדרה)

תזכורת: R חילופי נקרא תחום ראשי אם R תחום שלמות וכל אידיאל $I \triangleleft R$ הינו

כראשי $I=(a)$

טענה:

אם R תחום ראשי $\Leftarrow kdimR=1$

הוכחה:

בשיעור הקודם הוכחנו שכל אידיאל ראשוני $(0)\neq P\leq R$ הוא מקסימלי. אז אין שרשראות

ארוכות מ- $(0)\subsetneq P$

הגדרה: יהי R חוג חילופי

1) R נקרא חוג נתרי (Noetherian) אם כל סדרה עולה של אידיאלים:

$I_1\subseteq I_2\subseteq I_3\subseteq\dots$

מתייצבת. כלומר קיים n כך ש $I_n=I_{n+1}=I_{n+2}=\dots$

2) R נקרא ארטיני (Artinian) אם כל סדרה יורדת

$I_1\supseteq I_2\supseteq I_3\supseteq\dots$

מתייצבת

דוגמא:

$\mathbb{Z}$ נתרי אבל לא ארטיני, $2\mathbb{Z}\supseteq 4\mathbb{Z}\supseteq\dots\supseteq 16\mathbb{Z}\supseteq\dots$

משפט הופקינס-לויצקי:

כל חוג ארטיני הוא נתרי

טענה:

כל תחום ראשי הוא נתרי

הוכחה:

תהי $I_1\subseteq I_2\subseteq I_3\subseteq\dots$ שרשרת עולה של אידיאלים. יהי $I=\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

אזי I הינו אידיאל. אבל R תחום ראשי $\Leftarrow I=(a)$. אזי $a\in\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

$\Leftarrow$ קיים k כך ש $a \in I_k$ אזי $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = (a) \subseteq I_k$ $\Leftarrow$ $I_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ $\Leftarrow$ $I_k = I_{k+1} = \dots$

והסדרה מתייצבת

תוצאה:

$\mathbb{Z}$ נתרי