

דף תרגילים 1

1. חקרו את המשוואות הבאות:

$$I. \quad 3x^2 - 7y^2 + 5 = 0$$

$$II. \quad 5x^2 + 2x - 3 - 2y = 0$$

$$III. \quad 3x^2 - 4xy + 6y^2 - 14x + 28y + 30 = 0$$

$$IV. \quad x^2 + 5xy + y^2 + 10x + 4y + 7 = 0$$

$$V. \quad x^2 - 6xy + 9y^2 + 2x + y - 5 = 0$$

א. מצא אם התבנית מייצגת אליפסה, פרבולה, היפרבולה או מי ממקרי הקצה (קבוצה ריקה, שני ישרים, וכו').

ב. הצג את התבנית הריבועית שבמשוואות באמצעות מטריצה A .

ג. מצא את הערכים העצמיים של A , ווקטורים עצמיים באורך 1 לכל ערך עצמי.

ד. לכסן אורתוגונלית את המטריצה A .

ה. השתמש בהחלפת משתנים והפוך את התבנית הריבועית לתבנית ריבועית

סטנדרטית (כלומר ללא מחוברים עם הביטויים x, y או xy)

ו. במקרה של אליפסה מצא את המרכז, את אורך הרדיוסים (הארוך והקצר) ואת

הזווית של אחד הרדיוסים עם הצד החיובי של ציר ה- x .

ז. במקרה של היפרבולה, מצא את המרכז שלה, את האסימפטוטות שלה ואת

הקודקודים (הנקודות על ההיפרבולה שהכי קרובות למרכז).

ח. במקרה של פרבולה, מצא את הקודקוד שלה, את כיוון ההתקדמות שלה

ט. שרטט גרף של המשוואה ב- \mathbb{R}^2 .

2. מהו הערך הגבוה ביותר שמקבלת התבנית הריבועית $5x^2 - 2y^2$ עבור $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ שמקיים $x^2 + y^2 = 1$.

3. מהו הערך הגבוה ביותר שמקבלת התבנית הריבועית $7x^2 + 3y^2 - 2xy$ עבור $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ שמקיים $x^2 + y^2 = 1$.

4. תהיי A מטריצה שמייצגת את ההעתקה הליניארית $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ שמשקפת נקודות ביחס לישר $y = mx$ העובר בראשית

א. הבע את הערכים העצמיים לפי m .

ב. לכל ע"ע הבע לפי m נוסחא לווקטור עצמי באורך 1.

ג. הבע את A באמצעות m .

ד. כיצד יראה הגרף של התבנית הריבועית המתאימה $z = (x \ y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?

ה.

5. מצא משוואה ריבועית מהצורה $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ המתארת:

I. אליפסה שמרכזה ב- $(5,3)$ ואורכי ציריה 2 ו-4.

II. היפרבולה שהאסימפטוטות שלה הן $x = 6$ ו- $y = 2$.

III. פרבולה שקודקודה ב- $(1,1)$ והיא סימטרית ביחס לישר $x = y$.

6. קבע כיצד נראה הגרף של התבניות הריבועיות הבאות: פרבולויד אליפטי/פרבולויד היפרבולי/צילינדר פרבולי (שרטט בצורה כללית במערכת צירים): מי שלא זוכר את השמות מופנה לדף "איורים של משטחים מסדר שני".

$$z = 2x^2 + 8xy + 8y^2 + 32x + 64y + 130 \quad \text{I}$$

$$z = 3x^2 + 8xy + y^2 - 24x - 6y + 9 \quad \text{II}$$

$$z = -5x^2 + 8xy - 5y^2 \quad \text{III}$$

$$z = -4x^2 + 12xy - 9y^2 - 8x + 12y \quad \text{IV}$$

7. נתונה המשוואה הריבועית $x^2 - 4xy + y^2 + 8x + 2y - 5 = 0$

I. הראה שאוסף הנקודות המקיימות את המשוואה יוצר צורה של היפרבולה במישור

II. מצא את מרכז ההיפרבולה

III. מהו המרחק בין קודקודי ההיפרבולה? (העבר לצורה קנונית ומצא מרחק בין נקודות חיתוך עם הצירים)

8. הראה שאין נקודות במישור המקיימות את המשוואה $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 6y - 12 = 0$

9. נתונה המשוואה הריבועית $4x^2 - 24xy - 6y^2 + 4x - 12y + 1 = 0$

הראה שהמשוואה מתארת שני ישרים נחתכים, מצא את נקודת החיתוך ואת הזווית בין שני הישרים.

10. להלן משוואות בתלת מימד, מצאו בכלליות אילו צורות תלת-מימדיות הן מגדירות:

$$x^2 + 4xy + y^2 + 2xz + 2yz + 2z^2 = 3 \quad \text{I}$$

$$2xz - 2x^2 - y^2 - 2z^2 = 9 \quad \text{II}$$

$$2x^2 - 14xy - y^2 + 8yx + 2z^2 = 11 \quad \text{III}$$

$$11x^2 - 6xy + y^2 + 2xz - 2z^2 = 0 \quad \text{IV}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + z^2 = 5 \quad \text{V}$$