מטריצות הפיכות

הגדרה: מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת **הפיכה** אם קיימת מטריצה B כך ש $AB = BA = I$.
במקרה זה, מטריצה B נקראת **ההופכית** של A ומסומנת $B = A^{-1}$.

הערות

- מטריצה הפיכה היא בהכרח ריבועית
- המטריצה ההופכית A^{-1} היא יחידה.

דוגמא:

ההופכית של המטריצה $A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ היא A עצמה.

נראה עם כל שורה:

$R_i(AA) = R_i(A)\cdot A$

$R_1(AA) = R_1(A)\cdot A = (1,0,0)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} = 1\cdot(1\ 0\ 0) + 0(R_2) + 0\cdot(R_3) = (1,0,0)$

$R_2(AA) = R_2(A)\cdot A = (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} = (0,1,0) = R_2(I)$

$R_3(AA) = (0\ 1\ 0)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} = (0\ 0\ 1) \longrightarrow AA = I$

משפט: אם A **ריבועית** ו$AB = I$ אזי גם $AB = BA = I$ וB הינה ההופכית של A. כלומר מטריצה שהפיכה מצד אחד הפיכה משני צדדים.

תרגיל: הוכח כי $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

פתרון:

מספיק להוכיח $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$

$A(\underbrace{BB^{-1}}_{I})A^{-1} = AIA^{-1} = I$ $\boxed{\checkmark}$

תרגיל (הכללה): יהיו $A_1, A_2, \dots A_k$

מטריצות אזי

המכפלה $A_1 \cdot A_2 \cdots A_k$ הפיכה אמ"מ לכל i מתקיים A_i הפיכה (כל המטריצות הפיכות).
במקרה זה $(A_1 \cdot A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot A_{k-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}$

$\Rightarrow$ בדיקה ישרה $(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdots A_k)$

נכפיל את כל A_i, נמצא את ההפכים למכפלה (בהנתן $\forall i: \underset{\text{הפיכה}}{A_i}$)

$\Leftarrow$ נסמן את המטריצה ההפיכה של המכפלה - B

$A_1 \cdot \underbrace{A_2 \cdot \ldots A_k \cdot B}_{} = I$

A_1^{-1} זה ההפכי מצד הפיכה

נוכל להכפיל בהפיכה בשני אגפי המשוואה:

$\underbrace{A_1^{-1} A_1}_{I} \cdot A_2 \ldots A_k B = A_1^{-1} I$

$A_2 A_3 \ldots A_k B = A_1^{-1}$

נכפיל מצד ימין ב A_1

$A_2 \underbrace{A_3 \ldots A_k B A_1}_{A_2^{-1}} = \underbrace{A_1^{-1} A_1}_{I}$ / $\underset{\text{מצד שמאל}}{A_2^{-1}}$ | $\underset{\text{מצד ימין}}{A_2}$

<u>הערה:</u> לא ניתן לדעת שום דבר על $(A+B)^{-1}$

* $A = I, \quad B = -I \longrightarrow A+B=0$ לא הפיכה

* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \underset{\text{כן הפיכה}}{A+B=I}$

תרגיל

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה עם שורת אפסים. הוכח: A לא הפיכה.

פתרון

נשתמש בכפל שורה.

נניח A הפיכה $\Leftarrow$ $\exists B \in \mathbb{F}^{n\times n} : AB = I$

ידוע שיש שורת אפסים $-$ j $-$ $R_j(A) = 0$

לפי כפל שורה

$$R_j(AB) = R_j(A)\cdot B = \vec{0}\cdot B \Rightarrow R_j(AB) = \underbrace{0 \neq R_j(I)}_{\text{בסתירה}}$$

תרגיל 6.1 וחצי

הוכח שאם A הפיכה אזי גם המשוחלפת שלה הפיכה ומתקיים $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. הסק שאם A הפיכה וסמטרית אזי גם ההופכית שלה סימטרית.

פתרון

תהי A הפיכה $\Leftarrow$ קיימת A^{-1}

$$A^{-1}A = I \quad /()^t$$

$$(A^{-1}A)^t = I^t$$

$$A^t \cdot (A^{-1})^t = I^t = I \longrightarrow (A^t)^{-1} A^t \cdot (A^{-1})^t = (A^t)^{-1} I$$

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

$A = A^t$ (אם A סימטרית) נציב כמה שהוכחנו

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}$$

תרגיל

תהא A מטריצה ריבועית כך ש $A+A^2$ הפיכה. הוכח כי $A, A+I$ הפיכות

פתרון

הפיכה $A^2+A = A(A+I) \longrightarrow$

לפי משפט שהוכחנו קודם

מטריצה הפיכה $\Leftarrow$ המכפלה שלה הפיכה

$AB+A = A(B+I)$

$BA+A = (B+I)A$

דרך שניה - קיים B כך ש $A\underbrace{(A+I)\cdot B}_{A^{-1}} = I$

$A^2+A = (A+I)A \longrightarrow \underbrace{BA}_{(A+I)^{-1}}(A+I)$

מטריצות אלמנטריות

נזכיר שבעבר דיברנו על פעולות שורה אלמנטריות

1. $R_i \leftrightarrow R_j$
2. $\alpha R_i \to R_i$ כאשר $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$
3. $R_i + \alpha R_j \to R_i$ כאשר $i \neq j$

כעת נרצה להחליף את ביצוע הפעולות הנ"ל בכפל במטריצה הנקראת מטריצה אלמנטרית

את הפעולות נסמן ב ρ, $\rho(A) \equiv$ הפעלת הפעולה ρ על A.

$\rho: R_1 - R_2 \to R_1$

$\rho\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\rho\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצת (שורה) אלמנטרית היא מטריצה המתקבלת מהפעלת פעולת שורה אלמנטרית על מטריצת היחידה.

דוגמאות (ב $\mathbb{F}^{3\times 3}$):

1. החלפת שורות $R_2 \leftrightarrow R_3$ מתאים למטירצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. הכפלת שורה 1 ב-5 $5 \cdot R_1 \to R_1$ מתאים למטריצה $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. החסרת שורה 3 משורה 1 $R_1 - R_3 \to R_1$ מתאים למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

משפט: לכל מטריצה A מתקיים $\rho(A) = \rho(I)A$.

משפט: מטריצה אלמנטרית $E = \rho(I)$ היא הפיכה ומתקיים $E^{-1} = \rho^{-1}(I)$.

דוגמא: נמצא את ההופכית של המטריצות ממקודם:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

איך נמצא מטריצה הופכית?

בהנתן מטריצה A הפיכה ניתן לעבור מ A ל- I ע"י פעולות שורה אלמנטריות. כלומר $\underbrace{E_k \cdots E_2 E_1}_{A^{-1}} \cdot A = I$ כאשר E_i היא המטריצה האלמנטרית שמתאימה לפעולה האלמנטרית שביצענו במהלך הדירוג.

מכאן רואים בקלות כי $A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1$

כיוון ש $E_k \cdots E_2 E_1 = E_k \cdots E_2 E_1 \cdot I$ אז ההופכית מתקבלת מהכפלת המטריצות האלמנטריות ב I (או באופן שיקול ביצוע הפעולות האלמנטריות על I)

לכן אם נסתכל על המטריצה $(A|I)$ ונדרג אותה נקבל לאחר הדירוג $(I|A^{-1})$ פעולות הדירוג מתבצעות סימולטנית גם על A וגם על I. ברגע שהגענו מ A ל I אז במקביל הגענו מ I להופכית של A.

דוגמא: נמצא את ההופכית של תהא $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2 - \frac{1}{2}R_3 \to R_2 \\ R_3 \leftarrow \frac{1}{2}R_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 - R_2 \to R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

ההפכית של A!

נשים לב כי קיבלנו ש $A^{-1} = E_k \cdots E_2E_1$ המטריצה ההופכית היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות.

ומכאן שגם A ניתנת להצגה של מכפלה של מטריצות אלמנטריות כיוון ש $A = (A^{-1})^{-1} = (E_k \cdots E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$ כלומר A היא מכפלת בסדר הפוך של ההופכיות של האלמנטריות.

נמשיך בדוגמא להמחיש את הענין. ראינו שהדירוג מ תהא $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ל- I נבצע 4 פעולות שורה:

1. $R_1 \leftrightarrow R_2$ $\quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $R_2 - \frac{1}{2}R_3 \to R_2$ $\quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $R_1 - R_2 \to R_1$ $\quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\frac{1}{2}R_3 \to R_3$ $\quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = E_4E_3E_2E_1 \qquad A = E^{-1}E^{-2}E^{-3}E^{-4}$$

הערות:

1. אם אחרי הדירוג של A לא קיבלנו את I אז A אינה הפיכה.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

נניח בשלילה A הפיכה. בצורה המדורגת חייבת יש שורת אפסים.

נסמן ב- E את מכפלת המטריצות האלמנטריות שמדרגת לי את A.

E הפיכה, A הפיכה $\leftarrow$ EA הפיכה. אך: כיוון שיש שורת אפסים,

(ואמורה להיות I)

$I \neq EA$ בסתירה.

2. בהינתן מטריצה ריבועית A, A הפיכה $\leftrightarrow$ למערכת $Ax=b$ קיים פתרון יחיד.

$\Leftarrow$ A הפיכה $\leftarrow$ אין שורת אפסים $\leftarrow$ לכל משתנה יש איבר צר

$\leftarrow$ כל משתנה מוגדר באופן יחיד $Ax=b$ $\quad x=A^{-1}b$

$\Rightarrow$ נניח בשלילה לא הפיכה $\leftarrow$ במדורגת יש שורת אפסים $\leftarrow$

יש שורת סתירה או שיש משתנה חופשי. בסתירה.

תרגיל

נסמן $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

א. מצאו $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ כך ש- $AB = I_2$.

ב. האם B שמצאתם היא יחידה?

ג. האם יש $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ כך ש- $BA = I_3$?

פתרון

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ב) נשים לב ש-B לא יחידה. באופן דומה, נוכל לקחת את החלק הימני

של מטריצה A ולבנות $\tilde{B}$ שגם תקיים $A\tilde{B}=I$: $\tilde{B}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix}$

ג) לא ראינו. נניח שקיים $B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 \end{pmatrix}$

$BA = I_{3\times 3}$

$B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & 0 \\ b_3 & b_4 & 0 \\ b_5 & b_6 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ראינו שעבור 2 מטריצות ריבועיות A,B כך ש $BA=I$, כש-A יש שורת

אפסים בסתירה למה שהוכחנו קודם

תרגיל

תהי $0 \neq A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו: A לא הפיכה אם ורק אם היא מחלקת אפס.

פתרון

$\Longrightarrow$ נתון A מחלקת 0 $\longleftarrow$ קיים $B\neq0$ $AB=0$ נ״ח בשלילה A

הפיכה $\longleftarrow$ $\exists A^{-1}: AA^{-1}=I$ $B=IB=A^{-1}\underbrace{AB}_{0}=0$ בסתירה

$\Longleftarrow$ A לא הפיכה $\longleftarrow$ במדורגת שורת אפסים (משתנה חופשי) $\longleftarrow$ פתרון לא טריוויאלי

להומוגנית $\longleftarrow$ $\exists x\neq0: Ax=0$ אם נקח $B=\begin{pmatrix} | & | & | & \\ x & x & x & \dots \\ | & | & | & \end{pmatrix}$ ונקבל $AB=0$ $\Downarrow$ A מחלקת אפס

$A\neq0$
$B\neq0$

מ.ש.ל