חזרה

אינטגרלים סוג ראשון

$$z\left(t\right)=x\left(t\right)+iy\left(t\right)\qquad a\le t\le b$$

$$\int_{a}^{b}z\left(t\right)\,\mathrm{d}t=\int_{a}^{b}x\left(t\right)\,\mathrm{d}t+i\int_{a}^{b}y\left(t\right)\,\mathrm{d}t$$

משפט 1

1. $\int_{a}^{b}\left[z\left(t\right)\pm w\left(t\right)\right]\,\mathrm{d}t=\int_{a}^{b}z\left(t\right)\,\mathrm{d}t\pm\int_{a}^{b}w\left(t\right)\,\mathrm{d}t$
2. אם $c\in\mathbb{C}$ קבוע, $\int_{a}^{b}cz\left(t\right)\,\mathrm{d}t=c\int_{a}^{b}z\left(t\right)\,\mathrm{d}t$
3. אם $z'\left(t\right)=x'\left(t\right)+iy'\left(t\right)$ מוגדרת ורציפה ב$[a,b]$, $\int_{a}^{b}z'\left(t\right)\,\mathrm{d}t=z\left(b\right)-z\left(a\right)$
4. אם $z'\left(t\right)$ רציפה ב$[a,b]$, $\int_{a}^{b}\left|z'\left(t\right)\right|\,\mathrm{d}t$ = אורך המסילה המוגדרת ע"י

$$t\mapsto z\left(t\right)\qquad a\le t\le b$$

אינטגרל סוג שני

הם אינטגרלים מהסוג $\int_{\gamma}f\left(z\right)\,\mathrm{d}z$, כאשר γ מסילה ב$\mathbb{C}$ ו$f\left(z\right)$ פונקציה מרוכבת מוגדרת ורציפה למקוטעין על γ.

האינטגרל מוגדר כגבול של סכומי רימן: בפרט אם $z_0,z_1,\ldots z_n$ מהווה חלוקה של γ אז בונים סכום רימן $\sum_{k=1}^{n}f\left(z'_k\right)\left(z_k-z_{k-1}\right)$ כאשר לכל k, z'_k נקודה בγ בין z_{k-1} לz_k.

כאשר החלוקה נעשית עדינה ביותר, סכומים אלה שואפים לגבול(מספר מרוכב) שהוא לפי הגדרה $\int_{\gamma}f\left(z\right)\,\mathrm{d}z$.

בשביל חישוב אנליטי של האינטגרל עושים פרמטריזציה של γ ע"י

$$z=z\left(t\right)\qquad a\le t\le b$$

כאשר $z'\left(t\right)$ קיימת ורציפה למקוטעין ב$[a,b]$, ואז מוכיחים ש

$$\int_{\gamma}f\left(z\right)\,\mathrm{d}z=\int_{a}^{b}f\left(z\left(t\right)\right)z'\left(t\right)\,\mathrm{d}t$$

משפט 2

1. $\int_\gamma [f(z) \pm g(z)]\ \mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z \pm \int_\gamma g(z)\ \mathrm{d}z$
2. $\int_\gamma cf(z)\ \mathrm{d}z = c\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z$ ($c \in \mathbb{C}$ קבוע)
3. $\left|\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z\right| \le ML$ כאשר $M = \sup\{|f(z)| | z \in \gamma\}$ ואורך γ=L
4. $\int_{-\gamma} f(z)\ \mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z$ כאשר "$-\gamma$ " שווה לγ מתוארת בכיוון ההפוך
5. אם $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, $\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\ \mathrm{d}z$

משפט 3

נניח שγ מסילה ב$\mathbb{C}$, ו$f(z)$ מוגדרת ובעלת נגזרת רציפה $f'(z)$ לאורך γ, אזי

$$\int_\gamma f'(z)\ \mathrm{d}z = f(z_2) - f(z_1)$$

כאשר z_1 = הנקודה הראשונה של γ
וz_2 = הנקודה האחרונה של γ

הוכחה

נגדיר פרמטריזציה של γ $a \le t \le b$ $z = z(t)$, כאן $\begin{matrix} z(z) = z_1 \\ z(b) = z_2 \end{matrix}$. כעת:

$$\int_\gamma f'(z)\ \mathrm{d}z = \int_a^b f'(z(t))\, z'(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(z(t))\ \mathrm{d}t$$

לפי משפט 1 זה שווה

$$f(z(t))\big|_a^b = f(z(b)) - f(z(a)) = f(z_2) - f(z_1)$$

■

מסקנה

נניח שγ מסילה שהולכת מz_1 לz_2, ו$f(z)$ רציפה לאורך γ ויש לה פונקציה קדומה $F(z)$ גזירה כך ש$F'(z) = f(z)$ לכל z בγ. אזי

$$\int_\gamma f(t)\ \mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1)$$

הגדרה

קבוצה $S\subset\mathbb{C}\left(=\mathbb{R}^2\right)$ נקראת "פתוחה" אם לכל $z_0\in S$ קיימת סביבה $N_{z_0}=\{z\in\mathbb{C}||z-z_0|<r\}$ שכולה בS.

בלשון בני אדם: קבוצה פתוחה היא שטח ללא שפה.

הגדרה

קבוצה פתוחה $S\subset\mathbb{C}$ "קשירה" $\Leftrightarrow$ לכל שתי נקודות z_1 וz_2 בS קיימת מסילה γ מz_1 לz_2 שנשארת כולה בתוך S.

משפט 4

יהי $D\subset\mathbb{C}$ תחום פתוח וקשיר, ותהי $f(z)$ מוגדרת ורציפה בD. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. לכל מסילה סגורה γ בD $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=0$.
2. אינטגרלים של $f(z)$ על מסילות בD תלויים רק בקצוות, ולא במסילה.
3. קיימת ל$f(z)$ פונקציה קדומה: ז.א. קיימת פונקציה $F(z)$ אנליטית בD כך שלכל $z\in D$, $F'(z)=f(z)$.

הוכחה

$3\Leftarrow 2$ נובע מידית ממשפט 3

$3\Leftarrow 1$ נוכיח באופן דומה. אם γ מסילה סגורה בD, ואם z_1 נקודה כלשהי בγ, אפשר להסתכל על γ כמסילה מz_1 עד z_1!
נתון (3), ז.א. יש לf פונקציה קדומה F לאורך γ. לפי המסקנה למשפט 3

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=F(z_1)-F(z_2)$$

$2\Leftarrow 1$ ניקח שתי נקודות כלשהן $z_1,z_2\in D$ ושתי מסילות γ_1 וγ_2 בתוך D שהולכות מz_1 עד z_2. צ"ל $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}(z)=\int_{\gamma_2}f(z)\,\mathrm{d}z$. אבל המסילה $\gamma_1+(-\gamma_2)$ היא מסילה סגורה בתוך D. לפי הנתון(1)

$$0=\int_{\gamma_1+(-\gamma_2)}f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{\gamma_1}f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{-\gamma_2}f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{\gamma_1}f(z)\,\mathrm{d}z-\int_{\gamma_2}f(z)\,\mathrm{d}z$$

נעביר אגף להסיק: $\int_{\gamma_1}f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{\gamma_2}f(z)\,\mathrm{d}z$, ז"א $2\Leftarrow 1$

$3\Leftarrow 2$ לצורך זה נבחר $z_0\in D$ מסויים ולכל $z\in D$ נגדיר $F(z)=\int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w$ כאשר γ מסילה כלשהי בD שהולכת מz_0 עד z. כיוון שD קשיר יש מסילות γ בתוך D שהולכות מz_0 עד לz, וכיוון שנתון (2) $F(z)$ מוגדרת באופן חד־משמעי, כי האינטגרל בלתי תלוי במסילה γ.

טענה: לכל $z \in D$ f גזירה בz ומתקיים $F'(z) = f(z)$

הוכחה: נבחר $z \in D$ מסויים ונוכיח $F'(z) = f(z)$. כיוון ש$z \in D$ וD פתוח יש סביבה S של z שנשארת כולה בD. נבחר Δz קטן כך ש$z + \Delta z$ נשאר בS. אנחנו צריכים לחשב

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z}$$

כידוע, $F(z) = \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w$ כאשר γ בD הולכת מz_0 עד z.
נסמן ב$[z, z+\Delta z]$ את הקטע הישר מz עד $z+\Delta z$(שכולו בD).
נמצא ש$\gamma+[z, z+\Delta z]$ מסילה בתוך D שהולכת מz_0 עד $z+\Delta z$.
לכן

$$F(z+\Delta z) = \int_{\gamma+[z,z+\Delta z]} f(w)\,\mathrm{d}w$$

כזכור $F(z) = \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w$, לכן

$$F(z+\Delta z) - F(Z) = \int_{[z,z+\Delta z]} f(w)\,\mathrm{d}w$$

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\int_{[z,z+\Delta z]} f(w)\,\mathrm{d}w$$

כעת נעיר ש

$$\int_{[z,z+\Delta z]} \underbrace{f(z)\,\mathrm{d}w}_{\text{const}} = f(z)\,w\big|_{w=z}^{w=z+\Delta z} = f(z)\,\Delta z$$

ז.א. $\frac{1}{\Delta z}\int_{[z,z+\Delta z]} f(z)\,\mathrm{d}w = f(z)$. נובע:

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{[z,z+\Delta z]} [f(w) - f(z)]\,\mathrm{d}w$$

כעת נראה שכאשר $\Delta z \to 0$ אגף ימין(ולכן גם אגף שמאל) שואף לאפס. לצורך זה יהי $\epsilon > 0$ נתון. כיוון שf רציפה בD היא רציפה בנקודה z ולכן קיים $\delta > 0$ כך שאם $|w - z| < \delta$ מתקיים $|f(w) - f(z)| < \epsilon$. כעת אם $|\Delta z| < \delta$ אז לכל w בקטע הישר $[z, z+\Delta z]$ $|w - z| < \delta$ וממילא $|f(w) - f(z)| < \epsilon$. נובע שאם $|\Delta z| < \delta$

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{[z,z+\Delta z]} [f(w) - f(z)]\,\mathrm{d}w\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}ML < \frac{1}{|\Delta z|}\epsilon \qquad |\Delta z| = \epsilon$$

מכאן ש

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)$$

קיים ושווה 0.

במילים אחרות, $F'(z)$ קיימת ושווה ל$f(z)$. כיוון שהדבר נכון <u>לכל</u> $z\in D$ הוכחנו את הטענה.

הוכחנו את הטענה, וגם הוכחנו ש$2 \Rightarrow 3$ כי יצרנו פונקציה קדומה F עבור f.

■

דוגמה חשובה

ניקח $z_0\in\mathbb{C}$ כלשהו ו$n\in\mathbb{N}$ ונחשב $\oint_{|z-z_0|=r}\frac{1}{(z-z_0)^n}\,\mathrm{d}z$ ($r>0$)

פתרון ראשון(בלי חכמות)

נעשה פרמטריזציה של המסילה. ובכן אם $|z-z_0|=r$ אז $z-z_0=re^{i\theta}$, וכאשר θ מ0 עד 2π נתאר את המעגל פעם אחת נגד כיוון השעון. ז.א. הפרמטריזציה הסטנדרטית של המעגל הנתון היא

$$z=z(t)=z_0+re^{it}\qquad 0\le t\le 2\pi$$

לפי זה

$$\mathrm{d}z=ire^{it}\,\mathrm{d}t$$

$$(z-z_0)^n=r^{int}$$

לכן

$$\oint_{|z-z_0|=r}\frac{1}{(z-z_0)^n}\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^n e^{int}}ire^{it}\,\mathrm{d}t$$

עבור $n=1$ קיבלנו

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cancel{r}\cancel{e^{it}}}i\cancel{r}\cancel{e^{it}}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}i\,\mathrm{d}t=2\pi i$$

עבור $\mathbb{N}\ni n>1$ נקבל

$$\int_0^{2\pi}ir^{1-n}e^{(1-n)it}\,\mathrm{d}t=\cancel{i}r^{1-n}\frac{e^{(1-n)it}}{\cancel{i}(1-n)}\Bigg|_{0=t}^{2\pi=t}=\frac{r^{1-n}}{1-n}e^{(1-n)2\pi i}-\frac{r^{1-n}}{1-n}$$

וכיוון ש$n-1$ מספר שלם, $e^{(1-n)2\pi i}=e^0=1$, לכן האינטגרל שווה 0.

פתרון שני

עבור $n > 1$ הפונקציה $(z-z_0)^n = \frac{1}{(z-z_0)^n}$ היא בעלת פונקציה קדומה $\frac{(z-z_0)^{-n+1}}{-n+1}$,
לכן יכולנו לדעת מראש ע"פ משפט 4 שאם γ מסילה סגורה כלשהי במישור שאינה מכילה את הנקודה z_0.

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-z_0)^n}\,\mathrm{d}z = 0 \qquad \mathbb{N} \ni n > 1$$

מצאנו:

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi i$$

האינטגרל לא שווה 0 כי "הפונקציה הקדומה" היא $\log(z-z_0)$ וידוע שזו פונקציה בעייתית.
במקרה פרטי ניקח $z_0 = 0$, $r = 1$ ונעיין באינטגרל

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \lim_{z_1,z_2 \to -1} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$$

כאן

$$z_1 = e^{-i(\pi-\epsilon)} \qquad z_2 = e^{i(\pi-\epsilon)}$$

על הקשת מz_1 לz_2 קיימת ל $\left(\frac{1}{z}\right)$ פונקציה קדומה $\log z$ ולכן

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \log z_2 = \log z_1 = i(\pi-\epsilon) - (-i\pi + i\epsilon) = 2\pi i - 2i\epsilon$$

נשאיף $\epsilon \to 0$ להסיק $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i$. קיימנו בצורה מחודשת את נוסחת ניוטון ליבניץ.
$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$ זה השינוי בפונקציה הקדומה לאורך γ.

הכללה גדולה

תהי γ מסילה סגורה במישור שאינה מכילה את 0. אזי מספר ההקפות של γ סביב 0 נגד כיוון השעון = $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$ =(לפי הגדרה) $\mathrm{Ind}_\gamma(0)$(אינדקס של γ סביב 0)

כמו כן $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$ = מספר ההקפות של γ סביב z_0 נגד כיוון השעון =(לפי הגדרה) $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$

המטרה הבאה שלנו תהיה להוכיח שבתנאים מסויימים אם נתון ש$f\left(z\right)$ אנליטית וγ מסילה סגורה אפשר להסיק $\int f\left(z\right)\,\mathrm{d}z=0$ מבלי להכיר פונקציה קדומה לf. המשפט נקרא "משפט קושי" והוא יסוד של כל המשך הקורס.

רקע למשפט קושי

למה 1

נניח ש$f\left(z\right)$ מוגדרת בסביבת הנקודה z_0 וגזירה בz_0. אזי לכל z בסביבת z_0

$$f\left(z\right)=f\left(z_0\right)+f'\left(z_0\right)\left(z-z_0\right)+\epsilon\left(z\right)\left(z-z_0\right)$$

כאשר $\lim\limits_{z\to z_0}\epsilon\left(z\right)=0$.

הוכחה

הנתון אומר $f'\left(z_0\right)=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f\left(z\right)-f\left(z_0\right)}{z-z_0}$. לכן אם נגדיר

$$\epsilon\left(z\right)=\frac{f\left(z\right)-f\left(z_0\right)}{z-z_0}-f'\left(z_0\right)$$

$$\lim_{z\to z_0}\epsilon\left(z\right)=0$$

כעת:

$$\epsilon\left(z\right)\left(z-z_0\right)=f\left(z\right)-f\left(z_0\right)-f'\left(z_0\right)\left(z-z_0\right)$$

$$f\left(z\right)=f\left(z_0\right)+f'\left(z_0\right)\left(z-z_0\right)+\epsilon\left(z\right)\left(z-z_0\right)$$

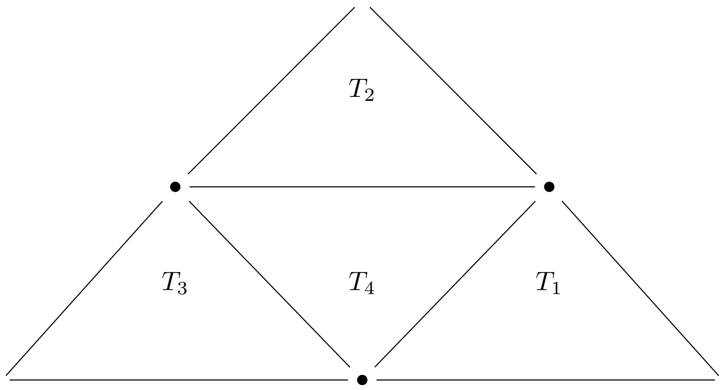
$\blacksquare$

הגדרה

עבור תחום $D\subset\mathbb{C}$ נסמן ב∂D השפה של D וב$\overline{D}$ הסגור של D שהוא $D\cup\partial D$.

למה 2(עקרון החלוקה)

יהי T משולש ב$\mathbb{C}$ הנתון ע"י הנקודות האמצעיות של הצלעות. נחלק את T ל4 משולשים:



נניח ש$f\left(z\right)$ מוגדרת ורציפה ב$\overline{T}$. אזי

$$\oint_{\partial T} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{4}\oint_{\partial T_k} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z$$

הערה

זה נכון לכל חלוקה של תחום

הוכחה

לפי הציור - כל קטע שהוא שפה לשני תחומים, הם בכיוונים הפוכים כאשר מקיפים כל תחום נגד כיוון השעון, ולכן מתבטלים.

יש גם הסבר לדבר - כאשר מקיפים תחום כלשהו "נגד כיוון השעון" רואים את התחום בצד שמאל. כל קטע של ∂T_4 שפה של שני משולשים ועוברים אותו פעמיים, פעם לראות את T_4 בצד שמאל, ופעם לראות משולש אחר T_k בצד שמאל. בהכרח עוברים אותו בכיוונים הפוכים, והאינטגרל עליו מתבטל.

משפט 5(משפט קושי במשולש)

יהי T משולש במישור. נניח ש$f\left(z\right)$ מוגדרת ואנליטית ב$\overline{T}$. אזי

$$\int_{\partial T} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z=0$$

הערה

$$\int_{\partial T} \frac{1}{z} \mathrm{d}z = 2\pi i \neq 0$$

זה לא סותר את משפט 5 כי אף על פי ש-$\frac{1}{z}$ אנליטית על ∂T היא לא אנליטית ב-T שמכיל את הנקודה 0.