

חזרה

הגדרה

יהי X מרחב וקטורי מעל $K(\mathbb{R} \text{ או } \mathbb{C})$. נורמה על X היא פונקציה $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ כאשר:

$$I. \|x\| \geq 0 \text{ עם שוויון } \iff x = 0$$

$$II. \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \text{ לכל } \alpha \in K$$

$$III. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

הזוג $(X, \|\cdot\|)$ נקרא "מרחב נורמי" (מעל K). ברגע שיש נורמה יש מטריקה $d(x, y) = \|x - y\|$.

הגדרה

יהי $(X, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי. אומרים שהוא שלם אם כל סדרת קושי מ- X מתכנסת לאיבר ב- X . מרחב נורמי שלם נקרא מרחב בנך.

דוגמאות

$$1. \mathbb{R}^n \text{ ו-} \mathbb{C}^n \text{ עם הנורמה האוקלידית, וגם עם עוד נורמה } \|x\| = \sum_{k=1}^n |x_k|$$

$$2. C(K) = \text{פונקציות רציפות } f : K \rightarrow \mathbb{C}, \mathbb{R} \text{ (או } K \text{ קומפקטית). הוכחנו שזה מרחב בנך. } \|f\| = \max_{x \in K} |f(x)|$$

3. מרחבי L^p .

יהי (X, S, μ) מ"מ. עבור $1 \leq p < \infty$ מגירים $L^p(d\mu)$ להיות אוסף כל הפונקציות המדידות $f : X \rightarrow \mathbb{R}^*$ (או $f : X \rightarrow \mathbb{C}^*$) כך ש $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty$.

הערה: עבור $f : X \rightarrow \mathbb{C}^*$ נאמר ש f מדידה- S אם $f = u + iv$, u, v מדידות S ו $\int_X f d\mu = \int_X u d\mu + i \int_X v d\mu$.

נעיר שאם $f(x) \equiv 0$ כ"מ $d\mu$ אזי $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} = 0$, אף על פי ש $f \neq 0$ - בסתירה לדרישה I לנורמה. הפתרון לבעיה זו הוא לומר ששתי פונקציות $f, g \in L^p$ שקולות אם $f(x) = g(x)$ כ"מ. ז.א. "פונקציות" ב L^p הן באמת מחלקות שקילות של פונקציות. נבדוק שאמנם $L^p(d\mu)$ מרחב וקטורי מעל K . ובכן, אם $f, g \in L^p$ צ"ל ש $f + g \in L^p$, ז.א. $\int_X |f + g|^p d\mu < \infty$. ובכן: לכל $x \in X$

$$|f(x) + g(x)| \leq 2 \max(|f(x)|, |g(x)|)$$

לכן

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p [\max(|f(x)|^p, |g(x)|^p)]$$

הדבר נכון לכל $x \in X$, ולכן

$$\int_X |f+g|^p \leq 2^p \int_X (|f|^p + |g|^p) d\mu < \infty$$

כי נתון ש $f, g \in L^p$. נותר להוכיח שאם $\alpha \in K$ ו $f \in L^p$ אז $\alpha f \in L^p$. אבל

$$\int_X |\alpha f(x)|^p d\mu = \int_X |\alpha|^p |f(x)|^p d\mu = |\alpha|^p \int_X |f|^p d\mu < \infty$$

לכן $\alpha f \in L^p$. יתר על כן

$$\|\alpha f\|_p = \left(\int_X |\alpha f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} = |\alpha| \left(\int_X |f|^p \right)^{1/p} = |\alpha| \|f\|$$

והוכחנו תכונה II של נורמה. תכונה III של נורמה לא טריביאלית ב L^p , ונצטרך הכנות לזה.

למה: יהיו $a, b \geq 0$, ויהי $0 < \lambda < 1$. אזי $a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b$ עם שוויון רק עבור $a = b$

הערה: עבור $\lambda = 1/2$ הלמה אומרת $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ וזה דבר ידוע)

הוכחה: אם $b = 0$ הלמה טריוויאלית, ואם לאו אפשר לחלק ב b לקבל טענה שקולה. ז.א. שקול:

$$a^\lambda b^{-\lambda} \leq \frac{a}{b} \lambda + (1-\lambda)$$

נציב $t = \frac{a}{b}$ והטענה היא לכל $t \geq 0$

$$t^\lambda \leq t\lambda + (1-\lambda)$$

כדי להוכיח אי שוויון זה נגדיר $\varphi(t) = t\lambda + (1-\lambda) - t^\lambda$. צ"ל: לכל $t \geq 0$, $\varphi(t) \geq 0$. אבל

$$\varphi'(t) = \lambda - \lambda t^{\lambda-1} = \lambda(1 - t^{\lambda-1})$$

לכן

$$t = 1 \iff \varphi'(t) = 0$$

וכיוון ש $0 < \lambda < 1$ אם $0 < t < 1$, $\varphi'(t) < 0$ ועבור $t > 1$, $\varphi'(t) > 0$. יתר על כן,

$$\varphi(0) = 1 - \lambda > 0 \quad \varphi(1) = 0$$

וממילא הגרף של $\varphi(t)$ אינו שלילי כאשר t חיובי והוכחנו ש $\varphi(t) \geq 0$ לכל $t \geq 0$.

■

משפט 1 (אי שוויון הולדר)

נניח ש $1 < p < \infty$. נגדיר q ע"י $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. ז.א. $pq = p + q$ או $q = \frac{p}{p-1}$ וגם $1 < q < \infty$.

כעת אם $f \in L^p(d\mu)$ ו $g \in L^q(d\mu)$ אז $fg \in L^1(d\mu)$ ומתקיים

$$\|fg\|_1 = \int_X |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

יש שוויון \iff קיימים קבועים $\alpha, \beta \geq 0$ כך ש $\alpha |f(x)|^p = \beta |g(x)|^q$ כב"מ.

הוכחה

כמקרה ראשון נניח ש $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. נפעיל את הלמה עבור $x \in X$ כלשהו כאשר

$$a = |f(x)|^p \quad b = |g(x)|^q$$

$$(1 - \lambda) = 1/q \quad \lambda = 1/p$$

לפי הלמה

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1 - \lambda) b$$

ז.א.

$$|f(x)g(x)| \leq \lambda |f(x)|^p + (1 - \lambda) |g(x)|^q$$

לכן

$$\int |fg| d\mu \leq \lambda \int |f|^p d\mu + (1 - \lambda) \int |g|^q d\mu = \lambda + (1 - \lambda) = 1 = \|f\|_p \|g\|_q$$

מקרה כללי

אם $f \equiv 0$ או $g \equiv 0$ אי שוויון הולדר טריוויאלי, ואם לא אפשר לנרמל. נגדיר:

$$F(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_p} \quad G(x) = \frac{g(x)}{\|g\|_q}$$

לפי זה

$$\|F\|_p = \left\| \frac{f}{\|f\|_p} \right\|_p = \frac{1}{\|f\|_p} \|f\|_p = 1$$

כמו כן $\|G\|_q = 1$ לפי המקרה הראשון

$$\int_X |FG| d\mu \leq \|F\|_p \|G\|_q = 1$$

$$\int_X \left| \frac{f}{\|f\|_p} \cdot \frac{g}{\|g\|_q} \right| d\mu \leq 1$$

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

■

הגדרה

עבור $1 < p, q < \infty$ אומרים ש p ו q "חזקות צמודות" אם $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. במקרה פרטי $p = q = 2$, במקרה זה אי שוויון הולדר הוא אי שוויון קושי שוורץ.

משפט 2) (אי שוויון מינקובסקי = אי שוויון המשולש ב L^p)

יהי $f, g \in \mathcal{L}^p(d\mu)$ אזי

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

עם שוויון $\iff f(x) = cg(x)$ או $g(x) = cf(x)$ כאשר c קבוע.

הוכחה

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_X |f + g|^p d\mu \leq \int_X |f + g|^{p-1} (|f| + |g|) d\mu = \\ &= \int_X |f + g|^{p-1} |f| d\mu + \int_X |f + g|^{p-1} |g| d\mu = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

ב I_1 נשים לב ש $f \in L^p$ (נתון) וגם $|f + g| \in L^p$, אבל $(p-1)q = p$ (צמוד לק) ולכן $|f + g|^{p-1} \in L^q$. נפעיל את אי-שוויון הולדר ל I_1 , כלומר

$$\int_X |f + g|^{p-1} |f| d\mu \leq \left[\int_X (|f + g|^{p-1})^q d\mu \right]^{1/q} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} = \|f + g\|_p^{p/q} \|f\|_p$$

כמו כן

$$I_2 \leq \|f + g\|_p^{p/q} \|g\|_p$$

נסכם:

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f + g\|_p^{p/q} (\|f\|_p + \|g\|_q)$$

רוצים להעביר $\|f + g\|_p^{p/q}$ לצד שמאל, אז נקבל חזרה $1 - p/q = 1$, ולכן קיבלנו

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

■

אם נחבר את כל החלקים: הוכחנו שעבור $1 < p < \infty$ $L^p(d\mu)$ מרחב נורמי. לגבי $L^1(d\mu)$ אי שוויון המשולש טריוויאלי, לכן גם $L^1(d\mu)$ מרחב נורמי.

הערה: אפשר להגדיר $L^p(d\mu)$ גם עבור $0 < p < 1$, אבל אז הביטוי $(\int |f|^p d\mu)$ אינו נורמה.

גם מגדירים את $L^\infty(d\mu)$ להיות (מחלקות שקילות של) פונקציות וחסומות בעיקר (essentially bounded functions). הנורמה היא

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \inf \{ \lambda \geq 0 \mid \mu \{ x \in X \mid |f(x)| > \lambda \} = 0 \} \\ &= \sup \{ \lambda \geq 0 \mid \mu \{ x \in X \mid |f(x)| > \lambda \} > 0 \} \\ &= \inf_{g \sim f} \sup \{ |g(x)| \mid x \in X \} \end{aligned}$$

כאשר $g \sim f$ אומר $f(x) = g(x)$ כב"מ $(d\mu)$.
תרגיל קל להוכיח ש L^∞ אמנם מרחב נורמי.

מקרה פרטי חשוב

ניקח $u = \mathbb{N}$ במקרה זה $L^p(du)$ הוא מרחב של סדרות, שקרוי ℓ^p . עבור $1 \leq p < \infty$ וסדרה $x = (x_n)_{n=1}^\infty$,

$$\|x\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p \right)^{1/p}$$

עבור $p = \infty$

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$$

תמיד

סדרה שייכת למרחב \iff הנורמה שלה סופית.
אי שוויון הולדר לסדרות אומר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q \right)^{1/q}$$

כאשר $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
אי שוויון מינקובסקי לסדרות אומר עבור $1 \leq p \leq \infty$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p \right)^{1/p}$$

המשימה הבאה היא להוכיח שמרחבי L^p שלמים. נצטרך הכנה לזה.

משפט 3

מרחב נורמי X שלם \iff כל טור ב- X שמתכנס בהחלט מתכנס.
(א.ז.) טור $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ב- X מתכנס בהחלט אם $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, ונוכיח שזה גורר התכנסות הטור עצמו בנורמה של X)

הוכחה

תחילה נניח ש- X שלם, ונניח $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. רוצים להוכיח $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ מתכנס, א.ז. רוצים להוכיח שהסכומים החלקיים $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ מתכנסים בנורמה של X לאיזה וקטור $x_0 \in X$, אבל כיוון ש- X מרחב שלם מספיק להוכיח ש- $\{S_n\}$ סדרת קושי. לצורך זה, יהי $\varepsilon > 0$ נתון. כיוון שטור המספרים $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ מתכנס הוא טור קושי, וקיים $k_0 \in \mathbb{N}$ כך שאם $n > m > k_0$ נובע שאם $\sum_{k=m+1}^n \|x_k\| < \varepsilon$.

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| < \varepsilon$$

בזה הוכחנו ש- $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ב- X . X שלם ולכן קיים גבול

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

בפרט הטור מתכנס.

לצד השני: נוכיח שכל טור ב- X שמתכנס בהחלט מתכנס, ונקח איזו סדרת קושי $\{x_n\}$ ב- X . צ"ל שהיא מתכנסת. אבל לפי תנאי קושי קיים x_{n_1} בסדרה כך שלכל $n > n_1$ $\|x_n - x_{n_1}\| < 1/2$. כמו כן קיים $n_2 > n_1$ כך שלכל $n > n_2$ $\|x_n - x_{n_2}\| < 1/4$. אפשר להמשיך בכך, ולבנות תת סדרה x_{n_k} כך שלכל $\mathbb{N} \ni k$ $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$. כעת נבנה טור

$$x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_3} - x_{n_2}) + \dots = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$$

לפי הבנייה טור זה מתכנס בהחלט, ולפי הנתון שלנו הוא מתכנס לאיזה $x_0 \ni x$. הטור טלסקופי והסכומים החלקיים שלו בדיוק x_{n_k} , לכן הוכחנו $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$, ובה מצאנו תת סדרה של $\{x_n\}$ שמתכנסת ב- X .

טענה: $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$ נתון. כיוון ש- $\{x_n\}$ סדרת קושי, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שאם $m, n > N$ אז $\|x_m - x_n\| < \varepsilon/2$. כעת נקבע $n > N$ ונשים לב שקיים $k_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k > k_0$ האינדקס $n_k > N$, בפרט עבור כל $k > k_0$ $\|x_{n_k} - x_n\| < \varepsilon/2$. נשאיף $k \rightarrow \infty$ ונסתמך על רציפות הנומרה (תרגיל קל!), לומר ש

$$\|x_0 - x_n\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - x_n\| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

בסיכום: לכל $n > N$ $\|x_0 - x_n\| < \varepsilon$ ונובע: $x_n \rightarrow x_0$, בפרט יש גבול לסדרת קושי כלשהי $\{x_n\}$. לכן המרחב X שלם.



שאלה

מה זאת אומרת "הנומרה רציפה"? ואיך מוכיחים זאת?

תשובה

הכוונה שאם $x_n \rightarrow x$ ב- X , $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, וזה נכון כי לכל n $0 \leq \| \|x_n\| - \|x\| \| \leq \|x_n - x\|$.

משפט 4

עבור $1 \leq p \leq \infty$ המרחבים $L^p(d\mu)$ שלמים.

הוכחה

כאן ניתן הוכחה עבור $1 \leq p < \infty$. עבור $p = \infty$ ההוכחה יותר קלה, ונשאר לתרגיל. ובכן, נקבע $p, 1 \leq p < \infty$, וניקח טור ב- L^p שמתכנס בהחלט. ע"פ משפט 3 יש רק להוכיח שהוא מתכנס ב- L^p .

ובכן, הנתון הוא שלכל $n, f_n \in L^p$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty$. כעת, עבור כל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_k(x)|$$

לפי אי שוויון המשולש,

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\|_p = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p \stackrel{\text{def}}{=} M < \infty$$

ה- g_n עולים עם n , ולכן לכל $x \in X$ מוגדר $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \in [0, \infty]$. לפי התכנסות מונוטונית

$$\|g\|_p^p = \int_X g^p d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n^p d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_p^p \leq M^p < \infty$$

בפרט $\int g^p d\mu < \infty$, ולכן $g(x) < \infty$ כב"מ $(d\mu)$. לפי הגדרה

$$\infty > g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

ז.א. לכמעט כל x מתכנס בהחלט ומוגדר היטב $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ כב"מ, ובנקודות היוצאות מן הכלל נגדיר $f(x) = 0$.

טענה: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס ל- $f(x)$ במובן של L^p .

הוכחה: לכל n נגדיר סכום חלקי $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$. לפי הבנייה שלנו $S_n(x) \rightarrow f(x)$ כב"מ. יתר על כן,

$$|S_n(x)| \leq \sum_{k=1}^n |f_k(x)| = g_n(x)$$

וגם

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| = g(x)$$

מתקיים $S_n - f \rightarrow 0$ כב"מ, ואנחנו צריכים להוכיח ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |S_n - f|^p d\mu = 0$. אבל לפי השלבים לעיל לכמעט כל x

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq |2g(x)|^p$$

$$\int g^p d\mu \leq m^p$$

כפי שהוכחנו לעיל. יוצא ש $|S_n - f|^p \rightarrow 0$ בצורה נשלטת, ונוכל להסיק ממשפט ההתכנסות הנשלטת

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |S_n - f|^p d\mu = \int_X 0^p d\mu = 0$$

לכן $S_n \rightarrow f$ ב L^p , או במילים אחרות, $f(x) = \sum f_n(x)$ במובן של L^p .

נובע ש $L^p(d\mu)$ שלם, $1 \leq p < \infty$.

■

מסקנה (מתוך ההוכחות)

אם $f_n \rightarrow f$ ב L^p , $1 \leq p < \infty$, אז יש תת סדרה $f_{n_k} \rightarrow f$ כ"מ ב X .

דוגמאות

1. נשתמש במידת לבג dm על $[0, 1]$. עבור $1 \leq p < \infty$ נבנה סדרה $f_n \in L^p(dm)$ כך ש $f_n \rightarrow 0$ במובן של L^p , אבל $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$ אינו קיים באף נקודה של $[0, 1]$.

ובכן: עבור $n \in \mathbb{N}$ נרשום $n = 2^k + L$ עבור $k \in \mathbb{N}$ ו $0 \leq L < 2^k$ טבעי, ונגדיר $f_n(x) = I_{[\frac{L}{2^k}, \frac{L+1}{2^k}]}(x)$. יוצא שלכל $x \in [0, 1]$, סדרה המכילה ∞ אפסים אחדים. לכן $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ אינו קיים. אבל, אם $n = 2^k + L$ אז

$$\|f_n - 0\|_{\mathcal{L}^p}^p = \int_{[0,1]} |f_n|^p dm = \frac{1}{2^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

לכן $f_n \rightarrow 0$ ב L^p , $1 \leq p < \infty$.

הערה: ב L^∞ הסדרה f_n מתבדרת כי לכל n $\|f_n - 0\|_\infty = \text{ess sup } f_n = 1 \not\rightarrow 0$.

2. $f_n = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ n & x = 1/n \\ 0 & x = 2/n \end{cases}$ ולינארית במעברים. לכל $x \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, אבל עבור L^1

$$\|f_n - 0\|_{\mathcal{L}^1} = \int_0^1 |f - 0| dm = \int_0^1 f(x) dx = 1 \not\rightarrow 0$$

ז.א. $f_n \rightarrow 0$ נקודתית אבל לא במובן של L^1 .