פתרון תרגיל בית 8 בהסתברות וסטטיסטיקה מתמטית
88-373 סמסטר ב' תשפ"א

מרטינגלים

תרגיל 1. יהי $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ הילוך מקרי סימטרי על $\mathbb{Z}$ (כלומר $S_0 = 0$, $X_i = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \end{cases}$).

א. האם S_n^3 הוא מרטינגל? תת-מרטינגל? על-מרטינגל?

ב. תקנו את S_n^3 כך שיהיה מרטינגל על ידי הוספת גורמים קטנים יותר.

פתרון.

א. S_n^3 הוא תת-מרטינגל, כי $f(x) = x^3$ היא פונקציה קמורה. במפורש,

$S_n^3 = f(S_n) = f(\mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]) \leq \mathbb{E}[f(S_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\left[S_{n+1}^3 \mid \mathcal{F}_n\right]$.

ב. נחשב:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_{n+1}^3 \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[(S_n + X_{n+1})^3 \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[S_n^3 + 3S_n^2 X_{n+1} + 3S_n X_{n+1}^2 + X_{n+1}^3 \mid \mathcal{F}_n\right] = \\ &= S_n^3 + 3S_n^2 \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] + 3S_n \mathbb{E}\left[X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[X_{n+1}^3 \mid \mathcal{F}_n\right] = \\ &= S_n^3 + 3S_n\end{aligned}$$

לכן אפשר לנחש שהתיקון יהיה $M_n = S_n^3 - 3nS_n$. אכן,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{n+1}^3 \mid \mathcal{F}_n\right] &= S_n^3 + 3S_n - 3(n+1)\mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \\ &= S_n^3 + 3S_n - 3(n+1)S_n = S_n^3 - 3nS_n\end{aligned}$$

תרגיל 2. יהי S_n הילוך מקרי סימטרי על $\mathbb{Z}$, ותהי $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ פונקציה.

א. אילו תנאים h צריכה לקיים כך ש-$h(S_n)$ יהיה מרטינגל?

ב. הראו שהפונקציות היחידות המקיימות את התנאים שרשמתם הן הפונקציות הלינאריות $h(x) = ax + b$.
(הדרכה: אם $h(0) = b$ ו-$h(1) = a + b$, תראו שזה קובע את h)

פתרון.

א. רוצים שיתקיים $h(S_n) = \mathbb{E}[h(S_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] = \frac{1}{2}h(S_n+1) + \frac{1}{2}h(S_n-1)$, כלומר שלכל $a \in \mathbb{Z}$ יתקיים

$$h(a) = \frac{1}{2}h(a+1) + \frac{1}{2}h(a-1).$$

(למי שמכיר: זה אומר ש-h היא פונקציה הרמונית על $\mathbb{Z}$.)

ב. אפשר להראות את הטענה הזו באינדוקציה, כי

$$h(a+1) = 2h(a) - h(a-1).$$

תרגיל 3. ראינו בתרגול את הדוגמה של הכד של פוליה. הכלילו את הדוגמה למקרה שבו ההסתברויות ההתחלתיות לא זהות: נניח שבתחילה יש a כדורים כתומים ו-b ירוקים, ובכל צעד שולפים כדור אחד ומחזירים את אותו הכדור עם עוד כדור מאותו הצבע. איך ייראה המרטינגל הפעם?

פתרון. נסמן על ידי G_n את כמות הכדורים הירוקים בשלב ה-n-י. אחרי n שלבים יש בכד $n+a+b$ כדורים. לכן

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G_{n+1} \mid G_1,\ldots,G_n] &= \frac{G_n}{n+a+b}\cdot(G_n+1) + \frac{n+a+b-G_n}{n+a+b}\cdot G_n = \\ &= \frac{G_n^2 + G_n + (n+a+b)G_n - G_n^2}{n+a+b} = \frac{n+1+a+b}{n+a+b}\cdot G_n\end{aligned}$$

מכאן קל לראות ש-$M_n = \frac{G_n}{n+a+b}$, כלומר אחוז הכדורים הירוקים לאחר n שלבים, הוא מרטינגל.

תרגיל 4. יהיו $X_1, X_2, \ldots$ ממבתש"ה שהפונקציה יוצרת המומנטים שלהם $M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$ סופית לאיזשהו $t \neq 0$. נגדיר

$$Z_n = Z_n(t) = \prod_{j=1}^{n} \frac{e^{tX_j}}{M_X(t)} = \frac{e^{tS_n}}{M_X(t)^n}.$$

הראו שזהו מרטינגל ביחס לפילטרציה הטבעית של $X_1, X_2, \ldots$. הוא נקרא גם **מרטינגל יחס הנראות** של $X_1, X_2, \ldots$.

פתרון. אכן,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid X_1,\ldots,X_n] &= \mathbb{E}\left[\frac{e^{tS_n+tX_{n+1}}}{M_X(t)^{n+1}} \mid X_1,\ldots,X_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{e^{tS_n}\cdot e^{tX_{n+1}}}{M_X(t)^{n+1}} \mid X_1,\ldots,X_n\right] = \\ &= \frac{e^{tS_n}}{M_X(t)^{n+1}}\cdot\mathbb{E}\left[e^{tX_{n+1}} \mid X_1,\ldots,X_n\right] = \frac{e^{tS_n}}{M_X(t)^{n+1}}\cdot\mathbb{E}\left[e^{tX_{n+1}}\right] = \\ &= \frac{e^{tS_n}}{M_X(t)^{n+1}}\cdot M_X(t) = \frac{e^{tS_n}}{M_X(t)^n} = Z_n\end{aligned}$$

תרגיל 5. הוכיחו את הטענה שהשתמשנו בה בתרגול: אם $\{X_n\}$ מרטינגל ביחס לפילטרציה $\{\mathcal{F}_n\}$, אז לכל $k \geq 0$ מתקיים $\mathbb{E}\left[X_{n+k} \mid \mathcal{F}_n\right] = X_n$. (אפשר לנסח טענות דומות עבור על-מרטינגלים ועבור תת-מרטינגלים)

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על k. עבור $k = 0$ הטענה ברורה. נניח שהטענה נכונה לאיזשהו k, ונוכיח ל-$k+1$: ממגדל התוחלות,

$$\mathbb{E}\left[X_{n+k+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_{n+k+1} \mid \mathcal{F}_{n+k}\right] \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[X_{n+k} \mid \mathcal{F}_n\right] = X_n.$$

$\square$

תרגיל 6. יהי $\{X_n\}$ מרטינגל ביחס לפילטרציה $\{\mathcal{F}_n\}$. נניח שהפונקציות יוצרות המומנטים של כל X_n מוגדרות על כל $\mathbb{R}$. מה תוכלו להגיד על הקשר ביניהן?

פתרון. ניעזר באי-שוויון ינסן: הפונקציה $x \mapsto e^x$ קמורה, ולכן

$$\begin{aligned} M_{X_n}(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX_n}\right] = \mathbb{E}\left[e^{t\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\mathbb{E}[tX_{n+1}|\mathcal{F}_n]}\right] \leq \\ \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{tX_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n\right]\right] = \mathbb{E}\left[e^{tX_{n+1}}\right] = M_{X_{n+1}}(t). \end{aligned}$$

בהצלחה!