תזכורת:

בשיעור הקודם דיברנו על בסיסים.

יהי $V \subseteq \mathbb{R}^n$ מרחב וקטורי, אזי קיים לV בסיס.

בסיס היא קבוצה פורשת ובת"ל.

כלומר, תת קבוצה של V שה$span$ שלה זה כל V, והיא בת"ל.

בנוסף הגדרנו מימד של מרחב.

מימד זה מספר הוקטורים בבסיס.

הערה: ראינו שלמרחב וקטורי יש יותר מבסיס אחד (למעשה יש אינסוף בסיסים שונים). אבל בכולם תמיד יש את אותו מספר של וקטורים.

בשביל לחשב מימד של מרחב וקטורי, מספיק למצוא בסיס מסויים למרחב, ולספור כמה איברים יש בו.

למשל: המימד של $\mathbb{R}^n$ הוא n. כי הקבוצה הבאה מהווה בסיס:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, .. \right\}$$

משפט השלישי חינם:

יהי V מרחב ממימד n. ותהי $A \subseteq V$. אזי אם A מקיימת שניים מבין שלושת התנאים הבאים, אז היא תקיים גם את התנאי השלישי, והיא תהיה בסיס לV:

1. A פורשת את V
2. A בת"ל.
3. בA יש בדיוק n וקטורים.

דוגמא: קבעו האם הקבוצה הבאה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ היא בסיס ל$\mathbb{R}^3$.

פתרון: ידוע שהמימד של $\mathbb{R}^3$ הוא 3 . ובקבוצה הנתונה יש 3 איברים. אז מספיק לבדוק רק את אחד מהתנאים פטרשת או בת"ל. לא צריך לבדוק את שניהם.

נבדוק בת"ל.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ניתן להמשיך ולאפס את 4, ונקבל איבר מוביל בעמודות הראשונה והשניה. בעמודה השלישית אין איבר מוביל, כלומר, יש משתנה חופשי. ולכן הקבוצה ת"ל, כלומר, לא בסיס.

דוגמא: קבעו האם הקבוצה הבאה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ היא בסיס ל$\mathbb{R}^3$.

פתרון: בקבוצה יש 3 איברים, ולכן מספיק לבדוק את אחד התנאים. נבדוק בת"ל.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

בכל עמודה יש איבר מוביל, לכן הקבוצה בת"ל. ולכן היא בסיס, לפי משפט השלישי חינם. (לא צריך לבדוק האם היא פורשת).

תרגיל: מצאו בסיס נוסף למרחב

$$V = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

חוץ מהקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ שמהווה בסיס.

פתרון: אפשר למשל לקחת $\left\{ 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

איך אפשר לדעת שזה עובד?

אז ראשית, קל לראות שהקבוצה החדשה היא בת"ל.

בנוסף, ברור ש$V \subseteq \left\{ 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (מרחב וקטורי סגור לכפל בסקלר/ קל לראות שהוקטורים החדשים הם צירופים לינארים של הוקטורים שאנחנו עושים להם $span$.)

המימד של V הוא 2 .

ממשפט השלישי חינם קבוצה בת"ל בת שני איברים הוא גם פורשת ולכן בסיס.

סימון: יהי V מרחב וקטורי. נסמן את המימד שלו ב$\dim V$.

משפט: "הכלה ושוויון מימדים"

נניח שיש לנו שני תתי מרחבים שמוכלים אחד בשני $U \subseteq V$, והמימד שלהם שווה, כלומר $\dim U = \dim V$, אז $U = V$.

הערה: בעיקרון על מנת להוכיח ששתי קבוצות שוות צריך להראות הכלה דו כיוונית, כלומר $U \subseteq V$ ו$V \subseteq U$.

במקרה של תתי מרחבים מאותו מימד, מספיק להוכיח הכלה בכיוון אחד.

תרגיל: קבעו האם שני המרחבים הבאים שווים:

$$U = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, V = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

פתרון: $\dim U = \dim V = 2$.

מספיק להוכיח שאחד מהם מוכל בשני.

נעביר את אחד המרחבים לצורה של משוואות.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 3 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 1 & 3 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 2 & z-x \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & z-x-2(y-x) \end{array}\right)$$

$$U = span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : x-2y+z=0\right\}$$

האם $V = span\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}\right\}$ מוכל בU?

נבדוק האם $\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}$ נמצאים בU.

כלומר, נציב במשוואה ונראה אם היא מתקיימת.

מתקיים.

מכיוון שU הוא תת מרחב הוא סגור לחיבור ולכפל בסקלר, ולכן הוא מכיל כל צירוף לינארי של $\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}$. כלומר, הוא מכיל את $V = span\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}\right\}$.

קיבלנו ש

$$V \subseteq U$$

ויש להם את אותו מימד, לכן $V = U$.

תרגיל: קבעו האם המרחבים הבאים שווים

$$U = N\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -1 & 2 & 0 & 3\end{pmatrix}, V = N\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 6 & 7.5\end{pmatrix}$$

$$N(A)$$

הוא סימון לאוסף הפתרונות של המערכת ההומוגנית שמיוצגת ע"י המטריצה.

פתרון: נחשב את $\dim U$.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -1 & 2 & 0 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2+R_1} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 4 & 3 & 7\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to 0.25R_4} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4}\end{pmatrix}$$

יש 2 משתנים חופשיים, ולכן המימד יהיה 2, כי בכל אחד מהם נציב פרמטר. והבסיס מתקבל ע"י לקיחת וקטור של כל פרמטר. אז אם יש שני פרמטרים, יהיו שני וקטורים בבסיס.

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 6 & 7.5\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix}1 & 4 & 6 & 7.5\\ 2 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2 2R_1} \begin{pmatrix}1 & 4 & 6 & 7.5\\ 0 & -8 & -9 & -14\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2 2R_1}$$

המימד הוא 2, מאותה סיבה.

לשני המרחבים יש את אותו מימד.

מספיק להוכיח שאחד מהם מוכל בשני.
לצורך כך נעביר אחד מהם לצורה של $span$.
נעשה את זה עם הראשון.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

נציב $x_3 = t, x_4 = s$

$$\begin{pmatrix} -1.5t - 0.5s \\ -\frac{3}{4}t - \frac{7}{4}s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1.5 \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -0.5 \\ -\frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שני הוקטורים שקיבלנו מהווים בסיס לU.
בשביל לבדוק האם הם שייכים לV, צריך לבדוק האם הם מקיימים את המשוואות שמגדירות את V.

$$V = N \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 7.5 \end{pmatrix}$$

כלומר, כל אחד מהוקטורים צריך להציב בשתי המשוואות ולראות אם מתקיים שוויון.
אכן הבסיס של U נמצא בV.
ולכן $U \subseteq V$.
ממשפט הכלה ושוויון מימדים נקבל $U = V$.
משפט: יהי V מרחב וקטורי ו$\{v_1, .., v_n\}$ בסיס. אזי כל וקטור $v \in V$ הוא צירוף לינארי של הבסיס בצורה יחידה. כלומר, קיימים סקלרים $\alpha_1, .., \alpha_n$ יחידים כך ש

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$

הגדרה: המקדמים היחידם האלה נקראים הקורדינטות של v ביחס לבסיס.
דוגמא: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ היא בסיס ל$\mathbb{R}^2$. מצאו את הקורדניטות של $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
פתרון:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -0.5R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -0.5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2.5 \\ 0 & 1 & -0.5 \end{array}\right)$$

$$\alpha_1 = 2.5, \alpha_2 = -0.5$$

מרחבי מטריצה

תהי $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

לA יש 3 מרחבים:

1. $N(A)$- מרחב ה0, שזה בעצם מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית שA מייצגת. כלומר, כל הוקטורים v כך ש

$$Av = 0$$

2. $R(A)$- מרחב השורות $span\{R_1(A), ..., R_m(A)\}$
3. $C(A)$- מרחב העמודות $span\{C_1(A), ..., C_n(A)\}$

לדוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$N(A)$- וקטורים $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ שמקיימים את מערכת המשוואות $x = 0$ ו$y = 0$. אז הפתרונות זה כל הוקטורים מהצורה

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

מימד= 1

$C(A)$-

$$span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

מימד= 2.

$R(A)$-

$$span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

מימד- 2 .

הערה: אם $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ אז

$$N(A) \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$R(A) \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$C(A) \subseteq \mathbb{R}^m$$

משפט: לכל מטריצה A,

$$\dim R(A) = \dim C(A)$$

הגדרה: הדרגה של מטריצה, $rank(A)$ זה המימד של מרחב העמודות שלו, ששווה גם למימד של מרחב השורות.
בדוגמא שלנו $rank(A) = 2$.