

גורם סתם 4

שאלה 1

יהי  $(\Omega, S)$  מרחב מדידים.

הגדרה:  $A \subseteq \Omega$ , פונקציה המוגדרת על  $A$  מוגדרת:

$$1_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$$

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

הוכחה:  $1_A$  מדידה אולם  $A$  מדידה. (כאשר  $A \in S$ )

שאלה 2

$(\Omega, S)$  מרחב מדידים,  $f, g$  פונקציות מדידות  $S$ -הן קדומים  
 ב- $\mathbb{R}$ . הראו כי הפונקציה:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot 1_{\{g \neq 0\}}$$

היא מדידה  $S$ -.

שאלה 3

יהי  $(\Omega, S)$  מרחב מדידים,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

ויהי  $\{A_n\}_n \subseteq S$  אוסף קדומים מדידות  $f$  עם  $\Omega = \bigcup_n A_n$   
הוכחה:  $f|_{A_n}$  מדידה  $S$ -אולם  $f$  מדידה  $S$ -לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

שאלה 4

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  מרחב מדידים  $(\Omega, S)$

(א) הוכחו:  $f$  מדידה  $S$ - $(\Leftrightarrow)$   $\exists B \subseteq \mathbb{R}$   $A \in B$  (כאשר  $A$  מדידה-סדורה)

$f^{-1}[A] \in S$  (הגמנים בהפסוק של  $A$  גמרי  $f$ ).

(ב) רמז לכיוון  $[ \Leftarrow ]$ : הראו כי קבוצה  $B$  קדומה  $A \in B$  המקימה  $f^{-1}[A] \in S$  מהווה סט מדידה (זההים מסתמך...)

(ג) אם  $f$  מדידה  $S$ -והמע  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  מדידה-קורת

הראו כי:  $g \circ f$  מדידה  $S$ -.

עמוד 5

יהי  $A \subseteq \mathbb{R}$  קבוצה מדידת,  $m(A) = 1$  :  $\varphi$  .  
מכיוון ש  $a \in \mathbb{R}$  :  $\varphi$   
 $m(A \cap (-\infty, a]) = \frac{1}{2}$

(המשפט של פאפ'אנוב) :