שיעורי בית 3

.

1. הכרה של עוד חבורות:

(א) הקווטרניונים: נגדיר

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}\right\}$$

8 מטריצות מרוכבות. עובדה: קבוצה זאת ביחס למכפלת מטריצות היא חבורה. (סימונים מקובלים:

$$1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},i=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix},j=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},k=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$$

ואז $G=\{\pm1,\pm i,\pm j,\pm k\}$).

מצאו את $C(G)$.

פתרון : נשים לב ש:

$$ij=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}=k$$

ואילו

$$ji=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}=-k\neq k$$

לכן $ij\neq ji$. ומכאן גם למינוסי שלהן: $i\cdot(-j)=-k\neq k=-j\cdot i$, $-i\cdot j=-k\neq k=-ji=j\cdot(-i)$. בסה"כ: $\pm i,\pm j\notin C(G)$.

בדומה:

$$ik=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=j$$

ואילו:

$$ki=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=-j\neq j$$

ולכן גם $i \cdot (-k) = j \neq -j = -k \cdot i$. ולכן גם $\pm k \notin C(G)$.

לבסוף, ברור ש־ $\pm 1 \in C(G)$, כי הן סקלריות. לכן בסה"כ:

$$C(G) = \{\pm 1\}$$

(ב) המרוכבים: נגדיר

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \ det(A) = a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

הוכיחו כי קבוצה זאת ביחס למכפלת מטריצות היא חבורה. מצאו את $C(G)$.

פתרון : מוגדרות

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & ab' + ba' \\ -ba' - ab' & -bb' + aa' \end{pmatrix}$$

שזה מהצורה

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

כאשר $x = aa' - bb', y = ab' + ba'$

כעת

$$det(\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}) = det \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot det \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} \neq 0$$

כמפלה של שני מספרים שונים מאפס.

קיבוציות־ נובע מקיבוציות של מכפלת מטריצות

איבר היחידה־ $I \in G$ (אם ניקח $a = 1, b = 0$)

הופכי: יהא $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G$ אזי מחישוב ישיר נקבל כי

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

שזה מהצורה

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

כאשר $x = \frac{a}{a^2+b^2}, y = \frac{-b}{a^2+b^2}$ ובנוסף

$$det\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \frac{1}{det\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}} \neq 0$$

ולכן ההופכי שייך ל G.

בנוסף, החבורה חילופית כי

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'-bb' & ab'+ba' \\ -ba'-ab' & -bb'+aa' \end{pmatrix}$$

ששווה ל

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a-b'b & a'b+b'a \\ -b'a-a'b & -b'b+a'a \end{pmatrix}$$

ולכן $C(G) = G$.

2. תזכורת מש.ב. הקודמים: עבור $\sigma \in S_n$ ומחזור $(i_1, i_2, \dots i_m) \in S_n$ מתקיים השיוויון $\sigma\,(i_1, i_2, \dots i_m)\,\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_m))$

(א) יהא $n > 2$. הוכיחו כי לכל מחזור $\tau \in S_n$ מאורך לפחות 2 קיימת תמורה $\sigma \in S_n$ כך ש $\sigma\tau \neq \tau\sigma$

פתרון: יהא $\tau = (i_1, i_2, \dots i_m) \in S_n$ מחזור נתון. נשים לב כי לכל $\sigma \in S_n$ מתקיים $\left[\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau\right] \iff [\sigma\tau = \tau\sigma]$ ולכן נראה קיימת תמורה $\sigma \in S_n$ כך ש $\sigma\tau\sigma^{-1} \neq \tau$.

אם $m \geq 3$ נוכל לכתוב $\tau = (i_1, i_2, i_3, \dots i_m)$ ואז נגדיר $\sigma = (i_1, i_2)$ ואז $\sigma\tau\sigma^{-1} = (i_2, i_1, i_3, \dots i_m)$ לפי תזכורת. כעת, $\sigma\tau\sigma^{-1} \neq \tau$ כי $\sigma\tau\sigma^{-1}[i_1] = i_3 \neq i_2 = \tau[i_1]$.

אם $m = 2$ אז $\tau = (i_1, i_2)$ ואז נבחר $t \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2\}$ (אפשרי כי $n > 2$) ונגדיר $\sigma = (i_1, t)$ ואז $\sigma\tau\sigma^{-1} = (t, i_2)$ לפי תזכורת. כעת, $\sigma\tau\sigma^{-1} \neq \tau$ כי $\sigma\tau\sigma^{-1}[i_m] = t \neq i_1 = \tau[i_m]$

(ב) יהא $n > 2$. הוכיחו כי $C(S_n) = \{id\}$

פתרון: יהא $\sigma' \in C(S_n)$ נראה כי $\sigma' = id$. נניח בשלילה כי $\sigma' \neq id$. יהא $\sigma' = \tau_1 \cdots \tau_m$ פירוק שלה למחזורים שונים. אם $m = 1$ סיימנו לפי סעיף קודם. אחרת $m > 1$ ונוכל לרשום $\sigma' = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_m$.

אם קיים $1 \leq i \leq m$ כך ש τ_i מחזור מאורך לפחות 3 אז בה"כ זהו τ_1 (אחרת, נמספרת את המחזורים באינדקסים אחרים) ונוכל לרשום $\tau_1 = (i_1, i_2, i_3, \dots i_m)$. כמו קודם נגדיר $\sigma = (i_1, i_2)$ ואז $\sigma = \sigma^{-1}$ מתחלפת עם המחזורים $\tau_2, \dots, \tau_m$ (כי הם זרים ל τ_1) ואז

$$\sigma\sigma'\sigma^{-1} = \sigma\tau_1\tau_2 \cdots \tau_m\sigma^{-1} = \sigma\tau_1\sigma^{-1}\tau_2 \cdots \tau_m$$

אם $\sigma\sigma'\sigma^{-1} = \sigma'$ אז נוכל בהכפלה של $(\tau_2 \cdots \tau_m)^{-1}$ לקבל כי $\sigma\tau_1\sigma^{-1} = \tau_1$ בסתירה. ולכן $\sigma\sigma'\sigma^{-1} \neq \sigma'$.

במקרה הנוסף: לכל $1 \leq i \leq m$ מתקיים כי τ_i מחזור באורך 2. בפרט $\tau_1 = (x, y), \tau_2 = (z, w)$ עבור x, y, z, w שונים. נגדיר $\sigma = (x, z)$ ואז σ מתחלפת עם המחזורים $\tau_3, \dots, \tau_m$ (כי הם זרים ל τ_1, τ_2) ואז

$$\sigma\sigma'\sigma^{-1} = \sigma\tau_1\tau_2 \cdots \tau_m\sigma^{-1} = \sigma\tau_1\tau_2\sigma^{-1} \cdots \tau_m$$

אם $\sigma\sigma'\sigma^{-1}=\sigma'$ אז נוכל בהכפלה של $(\tau_3\cdots\tau_m)^{-1}$ לקבל כי $\sigma\tau_1\tau_2\sigma^{-1}=\tau_1\tau_2$ אבל $\sigma\tau_1\tau_2\sigma^{-1}=(x,z)(x,y)(z,w)(x,z)=$ $\tau_1\tau_2=(x,y)(z,w)\neq(x,w)(z,y)$ בסתירה.

.3

(א) תהא G חבורה בה מתקיים: $\forall g\in G: g^2=e$. הוכיחו: G חבורה חילופית.

(ב) תהא G חבורה בה מתקיים: $\forall g_1,g_2\in G:(g_1g_2)^2=g_1^2g_2^2$. הוכיחו: G חבורה חילופית.

(ג) נגדיר את החבורה הדיהדרלית D_5 (חבורת השיקופים והסיבובים) באופן הבא: נסמן: $\tau=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \sigma=\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{5} & -\sin\frac{2\pi}{5}\\ \sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5}\end{pmatrix}$,
ונגדיר את החבורה להיות:

$$D_5=\left\{\tau^i\sigma^j|i\in\{0,1\},j\in\{0,\dots 4\}\right\}$$

עם פעולת כפל מטריצות רגיל. מצאו $x,y\in D_5$ כך ש־ $(xy)^2\neq x^2y^2$.

פתרון :

א. הנתון בעצם אומר ש־ $\forall g\in G: g^{-1}=g$. לכן נקבל שלכל $g,h\in G$ מתקיים:

$$gh=g^{-1}h^{-1}=(hg)^{-1}=hg$$

ולכן G חילופית.

ב. יהיו $g_1,g_2\in G$. לפי הנתון:

$$g_1g_2g_1g_2=(g_1g_2)^2=g_1^2g_2^2$$

נכפיל ב־g_1^{-1} משמאל, וב־g_2^{-1} מימין ונקבל:

$$g_2g_1=g_1g_2$$

ולכן G חילופית.

ג. ניקח את $x=\tau,y=\sigma$ נקבל:

$$(xy)^2=\tau\sigma\tau\sigma=\tau(\sigma\tau)\sigma=\tau(\tau\sigma^{-})\sigma=id\neq\sigma^2=\tau^2\sigma^2=x^2y^2$$

.4

(א) תהא G חבורה. הוכיחו שהמרכז שלה, $C(G)$, הוא גם חבורה (ביחס לאותה פעולה של G)

פתרון : הוכחה: סגירות־ יהיו $g_1,g_2\in C(G)$ אזי $\forall x\in G: g_1g_2x=g_1xg_2=xg_1g_2$ ולכן גם $g_1g_2\in G$

יחידה־ קיימת.

קיבוציות ־ מתקיים מירושה מ G.

הופכי־ יהיה $g\in C(G)$ אזי $\forall x\in G: gx=xg\Rightarrow xg^{-1}=g^{-1}x$ ולכן $g^{-1}\in C(G)$.

(ב) תהא G חבורה, הוכיחו:

$$C(C(G)) = C(G)$$

פתרון : נראה זאת ע"י שנראה ש-$C(G)$ אבלית, וראינו שעבור חבורה אבלית G מתקיים: $C(G) = G$.

יהיו $g, h \in C(G)$. אזי מהגדרת המרכז הם מתחלפים עם כל איברי G, ובפרט האחד עם השני, ולכן: $gh = hg$.