בדידה למורים־ תרגיל בית 8

1. בכמה דרכים ניתן לסדר קבוצה של 11 שחקני כדורגל (10 + קפטן) בשתי שורות, כך שבשורה הראשונה יהיו 5 שחקים, והקפטן יהיה באמצע השורה הראשונה?

פתרון: את מקומו של הקפטן אנחנו כבר יודעים. צריך לקבוע את מקומם של עשר השחקנים הנוספים.

צריך לבחור 4 שיהיו בשורה הראשונה, ולסדר אותם שם. כלומר, לבחור 4 מ10, בלי חזרות, ועם חשיבות לסדר. מספר הדרים לעשות זאת הוא: $\frac{10!}{6!}$. כעת, השישה הנותרים יהיו בוודאות מאחורה. נשאר רק לסדר אותם שם. מספר הדרכים לסדר 6 אנשים בשורה הוא $6!$. לסיכום, מספר הדרכים הוא: $\frac{10!}{6!} \cdot 6! = 10!$.

2. תזכורת: אם A קבוצה מגודל n, אז $\binom{n}{k}$ הוא מספר הדרכים לבחור k עצמים מהקבוצה. זה שווה למעשה למס' תתי הקבוצות מגודל k של A.

הוכיחו:

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n - 1$$

רמז: הראו ששני הביטויים "סופרים" את אותו דבר.

פתרון: כידוע, 2^n הוא מס' תתי הקבוצות של A. לכן $2^n - 1$ הוא מס' תתי הקבוצות הלא ריקות של A. גם הביטוי בצד שמאל סופר את תתי הקבוצות הלא ריקות של A: הוא סופר כמה תתי קבוצות יש מגודל 1, ועוד כמה תתי קבוצות יש מגודל 2, ועוד כמה תתי קבוצות יש מגודל 3 , וכו'. וככה בעצם סופר כמה תתי קבוצות לא ריקות יש סה"כ.

3. כמה מספרים בין 0 ל1000 יש כך שהספרה 3 מופיעה בהם בדיוק 2 פעמים?

נתייחס למס' בין 0 ל1000 כמספר בין 3 ספרות, שספרותיו מגיעות מהקבוצה $\{0, 1, ...9\}$. למשל, את 33 נייצג כ: 033.

ראשית, נבחר את המקומות בהם מופיעה הספרה 3. צריך לבחור 2 מקומות מתוך 3 . זאת בחירה בלי חשיבות לסדר ובלי חזרות. לכן יש : $\binom{3}{2} = 3$ אפשרויות. כעת, במקום הנותר נשבץ מספר אחד בין 0 ל9, לא כולל 3. יש 9 אפשרויות. אז מספר המספרים בין 0 ל1000 שהספרה 3 מופיעה בהם בדיוק פעמיים הוא $3 \cdot 9 = 27$.

4. א. יהי n מספר חיובי שלם כלשהו. כמה זוגות של מספרים אי שליליים יש כך שסכומם n? (לצורך העניין $a + b = n$ ו $b + a = n$ הם שני פתרונות שונים.)

ב. יהי n מספר חיובי שלם כלשהו. כמה שלשות של מספרים אי שליליים יש שסכומם n? (למשל: אם $n = 2$, אז האפשרויות הן: $2 = 2 + 0 + 0$, $2 = 0 + 2 + 0$, $2 = 0 + 0 + 2$,

$2 = 0 + 1 + 1$, $2 = 1 + 1 + 0$, ו $2 = 1 + 0 + 1$.) (הדרכה: המירו את השאלה לחלוקה של כדורים לתאים, באופן מתאים)

פתרון:

א. נפתור ב2 דרכים:

דרך פשוטה: למספר הראשון אפשר לבחור כל מספר בין 0 ל n. המס' השני יהיה פשוט n פחות המס הראשון שבחרנו. כלומר, אם בחרנו k, אז המספר השני יהיה $n-k$. בגלל ש $k \leq n$, אז $n-k$ אי שלילי. מספר הדרכים לכך הוא כמספר המספרים בין 0 לn, כלומר $n+1$.

דרך קומבינטורית: זה שקול לבעיה הבאה: יש n כדורים זהים ו2 תאים. וצריך לחלק את הכדורים בין התאים. (מס' הכדורים שנשים בתא הראשון שקול למס' הראשון שבחרנו, ומס' הכדורים שנשים בתא השני שקול למס' השני שבחרנו). חלוקה של n כדורים זהים ל2 תאים, כך שבתא יכול להיות יותר מכדור אחד, שווה לבחירה של n עצמים מתוך 2, עם חזרות ובלי חשיבות לסדר. (לכל כדור, יש לבחור תא שבו שמים אותו). לכן, מס' הדרכים הוא $n+1 = \frac{(n+1)!}{1!n!} = \begin{pmatrix} n+1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1+n \\ 2-1 \end{pmatrix}$.

ב. נשתמש בדרך הקומבינטורית מסעיף א'. השאלה שקולה לחלוקה של n כדורים זהים ל3 תאים. זאת חלוקה שבה הסדר לא משנה, ואפשר חזרות. לכן הנוסחא המתאימה היא

$$\begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1+n \\ 3-1 \end{pmatrix}$$

5. בכיתה יש 30 תלמידים. רוצים לחלק בינהם 30 כובעים: 18 כובעי טמבל, 7 כובעי מצחיה, ו5 כובעי קש. כך שכל תלמיד יקבל כובע אחד בדיוק. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

פתרון:

ראשית, נבחר 18 תלמידים שיחבשו כובעי טמבל. זאת בחירה ללא חזרות וללא חשיבות לסדר. לכן מס' האפשרויות הוא $\begin{pmatrix} 30 \\ 18 \end{pmatrix}$. כעת, נשארו 12 תלמידים. נבחר מתוכם 7 שיחבשו כובעי מצחיהץ כל השאר יחבשו כובעי קש. מס' הדרכים לבחור 7 תלמידים מתוך 12 הוא: $\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$. אז התשובה הסופית היא: $\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 18 \end{pmatrix}$

6. א. מה מספר הדרכים לסדר 16 אנשים כך ש6 יושבים סביב שולחן עגול, והיתר סביב שולחן עגול אחר?

ב. מה מספר הדרכים לסדר 16 אנשים כך ש6 יושבים סביב שולחן עגול והיתר סביב ספסל?

(תזכורת: מספר הדרכים לסדר n אנשים במעגל הוא $(n-1)!$)

פתרון:

א. ראשית, נבחר מי הם 6 האנשים שישבו בשולחן הראשון. ניתן לעשות את זה ב$\begin{pmatrix} 16 \\ 6 \end{pmatrix}$ דרכים. כעת, נסדר אותם סביב השולחן. מספר הדרכים לעשות זאת הוא $(6-1)! = 5!$. עשרת האנשים הנותרים יושבים סביב השולחן השני. מספר הדרכים לסדר אותם הוא $(10-1)! = 9!$. לסיכום, התשובה היא: $5!9! \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \end{pmatrix}$.

ב. ההתחלה כמו סעיף א': בוחרים 6 אנשים ב $\begin{pmatrix} 16 \\ 6 \end{pmatrix}$ דרכים, ומסדרים אותם סביב שולחן עגול ב$5!$ אפשרויות. נשארו 10 אנשים להושיב על ספסל. מספר הדרכים לסדר 10

אנשים בשורה הוא $10!$. תשובה סופית: $5!10!\begin{pmatrix} 16 \\ 6 \end{pmatrix}$.

7. מחלקת הבטחת מידע דרשה שסיסמא תורכב מ20 תווים, מתוכם 12 ספרות (שיכולות לבוא מכל אחת מספרות בין 0 ל9) ו8 אותיות (שיכולות לבוא מכל אחת מ22 אותיות העברית). ניתן לחזור על אותה ספרה ועל אותה אות יותר מפעם אחת. כמה סיסמאות אפשריות יש? (שימו לב: הספרות והאותיות ממשולבות זה בזה. כלומר, לא חייב להתקיים שקודם באות כל הספרות ואח"כ כל האותיות)

פתרון:

ראשית נבחר את המקומות בהן יופיעו ספרות. יש לבחור 12 מקומות מתוך 20. מספר הדרכים לעשות זאת הוא $\begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix}$. בשאר המקומות יופיעו אותיות. כעת, יש לבחור 12 ספרות מתוך 10, עם חזרות ועם חשיבות לסדר. מספר הדרכים לעשות זאת הוא 10^{12}. לבסוף, יש לבחור 8 אותיות מתוך 22 עם חזרות ועם חשיבות לסדר. מספר הדרכים הוא 22^8. לכן, מספר הסיסמאות האפשריות הוא: $\begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix} 10^{12}22^8$.