

אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 5

31 בדצמבר 2019

1. בדקו האם הפונקציות הבאות גזירות, ואם כן מצאו את הנגזרת:

$$f(x + yi) = \cos x \cos y + \sin x \sin yi \quad (\text{א})$$

$$f(x + yi) = xy + \frac{y^2 - x^2}{2}i \quad (\text{ב})$$

$$f(z) = z\bar{z} \quad (\text{ג})$$

$$f(x + yi) = e^y \operatorname{cis} x \quad (\text{ד})$$

$$f(x + yi) = e^{xy} \operatorname{cis}(xy) \quad (\text{ה})$$

$$f(x + yi) = \sin x \cos y + (\cos x \sin y)i \quad (\text{ו})$$

$$f(z) = (5 - i)z^3 - iz^5 + 6z^8 \quad (\text{ז})$$

פתרון:

א. נבדוק קושי רימן: $U(x, y) = \cos x \cos y, V(x, y) = \sin x \sin y$, לכן:

$$U_x = -\sin x \cos y, U_y = -\cos x \sin y$$

$$V_x = \cos x \sin y, V_y = \sin x \cos y$$

וכיון ש $U_x \neq V_y$ נקבל שהפונקציה לא גזירה.

ב. $U(x, y) = xy, V(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2} = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}$, ולכן:

$$U_x = y, U_y = x$$

$$V_x = -x, V_y = y$$

תנאי קושי רימן מתקיים: $U_x = V_y, U_y = -V_x$, ולכן הפונקציה גזירה ונגזרתה היא:

$$f'(x + yi) = U_x + V_x i = y - xi$$

ג. $f(x + yi) = x^2 + y^2$, ולכן $V(x, y) = 0$, $U(x, y) = x^2 + y^2$. נמצא נגזרות חלקיות:

$$U_x = 2x, U_y = 2y$$

$$V_x = 0, V_y = 0$$

משוואות קושי-רימן לא מתקיימות ולכן f לא גזירה.
 ד. נקבל: $U(x, y) = e^y \cos x$, $V(x, y) = e^y \sin x$. נגזרות חלקיות:

$$U_x = -e^y \sin x, U_y = e^y \cos x$$

$$V_x = e^y \cos x, V_y = e^y \sin x$$

משוואות קושי-רימן לא מתקיימות ($-e^y \sin x \neq e^y \sin x$), ולכן f לא גזירה.
 ה. $U(x, y) = e^{xy} \cos(xy)$, $V(x, y) = e^{xy} \sin(xy)$. נגזרות חלקיות:

$$U_x = ye^{xy} \cos(xy) - ye^{xy} \sin(xy) = ye^{xy}(\cos(xy) - \sin(xy)), U_y = xe^{xy}(\cos(xy) - \sin(xy))$$

$$V_x = ye^{xy} \sin(xy) + ye^{xy} \cos(xy) = ye^{xy}(\sin(xy) + \cos(xy)), V_y = xe^{xy}(\sin(xy) + \cos(xy))$$

משוואות קושי-רימן לא מתקיימות ולכן f לא גזירה.
 ו. כאן $U(x, y) = \sin x \cos y$, $V(x, y) = \cos x \sin y$, ולכן הנגזרות החלקיות:

$$U_x = \cos x \cos y, U_y = \sin x \sin y$$

$$V_x = -\sin x \sin y, V_y = \cos x \cos y$$

משוואות קושי-רימן מתקיימות ולכן גזירה, ונגזרתה:

$$f'(x + yi) = U_x + V_x i = \cos x \cos y - (\sin x \sin y)i$$

ז. לפי מה שלמדנו על נגזרת פולינום נקבל:

$$f'(z) = (15 - 3i)z^2 - 5uz^4 + 48z^7$$

2. תהי $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה גזירה. כידוע, יש $U, V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש-

$$f(x + yi) = U(x, y) + V(x, y)i$$

הוכיחו שאם V פונקציה קבועה אז f קבועה גם (במילים: אם החלק המדומה של f קבוע, אז f קבועה).

הדרכה: השתמשו בכך שאם f גזירה אז מתקיימות משוואות קושי-רימן, והוכיחו שגם U קבועה, והסיקו שלכן f קבועה.

פתרון:

כיון ש- f גזירה מתקיימות משוואות קושי רימן:

$$U_x = V_y$$

$$U_y = -V_x$$

אצלנו V קבועה ולכן נקבל $V_x = V_y = 0$ (כי נגזרת של קבועה זה 0). ולכן נקבל $U_x = V_y = 0, U_y = -V_x = 0$. קיבלנו ששתי הנגזרות החלקיות הינן 0, ולכן U קבועה. בסה"כ $f(x + yi) = U(x, y) + V(x, y)i$ היא סכום של פונקציות קבועות ולכן קבועה.

בהצלחה!