תרגול 8

1. תזכורת: פונקציונאל לינארי $T:X\to X$ כאשר X הינו מרחב בנך יקרא חסום אם $\sup_{x\in X}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\sup_{x\in X,\|x\|=1}\|Tx\|=M<\infty$.

משפט: פונקציונל לינארי הינו חסום אמ"מ הוא רציף.
הוכחה:
$\Leftarrow$: נניח כי הפונקציונל הינו חסום. אזי מתקיים שאם $\|x_n-x\|\to 0$ אזי $T(x_n-x)\le\|x_n-x\|M\to 0$ ולכן הפונקציונל רציף.
$\Rightarrow$: נניח כי הפונקציונל רציף. אז בהכרח הוא רציף ב 0 ולכן קיימת $\delta>0$ כך שאם $\|y\|<\delta$ אז $\|T(y)\|\le 1$. מכאן ש

$$\left\|T\left(\frac{\|x\|}{\delta}\left(\frac{\delta}{\|x\|}x\right)\right)\right\|=\frac{\|x\|}{\delta}\left\|T\left(\left(\frac{\delta}{\|x\|}x\right)\right)\right\|\le\frac{\|x\|}{\delta}$$

ומכאן כי הפונקציונל חסום.

2. נגדיר $T:C([0,1])\to\mathbb{R}$ ע"י $T[f]=f(0)$. הוכיחו שאם נגדיר על $C([0,1])$ את הנורמה הרגילה, אז T רציף, אבל אם נגדיר על $C([0,1])$ את נורמת L^2 ביחס למידת לבג, אז T לא רציף.

פתרון: נתחיל מהמקרה שעל $C([0,1])$ מוגדרת הנורמה הרגילה ($\|f\|=\max_{0\le x\le 1}|f(x)|$). כדי להוכיח רציפות נסתמך על המשפט הקודם, ונוכיח כי $\|T\|<\infty$ (כלומר T חסומה). ובכן, לכל f המקיימת $\|f\|=1$ מתקיים $\max_{0\le x\le 1}|f(x)|=1$ ולכן $|f(0)|\le 1$ או $|T[f]|\le 1$. מכאן שכל איברי הקבוצה $\{\|T[f]\|_{\mathbb{R}}:\|f\|=1\}$ חסומים מלעיל ע"י אחד, ולכן $\|T\|=\sup\{\|T[f]\|_{\mathbb{R}}:\|f\|=1\}\le 1<\infty$ כנדרש.

נניח כעת כי על $C([0,1])$ מוגדרת נורמת L^2 ביחס למידת לבג ($\|f\|=\left(\int_0^1|f|^2\,dm\right)^{1/2}$) ויש להפריך את הרציפות. נמצא סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת לפונקציית האפס בנורמת L^2 ,

אבל $T\left[f_n\right]\not\to T\left[0\right]=0$ ב- $\mathbb{R}$. ניקח סדרה כדלהלן $f_n\left(x\right):=\begin{cases}1-nx & 0\le x\le \frac{1}{n}\\ 0 & \frac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$. נחשב

$$\|f_n-0\|=\left(\int_0^1|f_n-0|^2\,dm\right)^{1/2}=\left(\int_0^1|f_n|^2\,dm\right)^{1/2}=\left(\int_0^{1/n}|1-nx|^2\,dm\left(x\right)\right)^{1/2}$$

$$=\left(\int_0^{1/n}\left(1-2nx+n^2x^2\right)dm\left(x\right)\right)^{1/2}=\left(x-nx^2+n^2\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1/n}\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{3n}}\to 0$$

לכל n $T\left[f_n\right]=f_n\left(0\right)=1$ ולכן $T\left[f_n\right]\to 1\neq 0$.

תזכורת: יהי X מ"ו, מ"פ על X היא פונקציה $\left\langle\cdot,\cdot\right\rangle: X\times X\to\mathbb{R}/\mathbb{C}$ המקיימת

- לינאריות ברכיב הראשון $\left\langle\alpha u+\beta v,w\right\rangle=\alpha\left\langle u,w\right\rangle+\beta\left\langle v,w\right\rangle$
- הרמיטיות $\left\langle v,u\right\rangle=\overline{\left\langle u,v\right\rangle}$ ב- $\mathbb{C}$ – או סימטריות $\left\langle v,u\right\rangle=\left\langle u,v\right\rangle$ ב- $\mathbb{R}$
- חיוביות $\left\langle v,v\right\rangle\ge 0$ עם שוויון $\Leftrightarrow$ $v=0$

נובע: אנטי לינאריות ברכיב השני $\left\langle u,\alpha v+\beta w\right\rangle=\overline{\alpha}\left\langle u,v\right\rangle+\overline{\beta}\left\langle u,w\right\rangle$ (לינאריות ב- $\mathbb{R}$)

3. הראו כי נורמת המקסימום במרחב $C\left(\left[a,b\right]\right)$ אינה מושרית מאף מכפלה פנימית.

פתרון: נפריך את זהות המקבילית $\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right)$. בהרצאה הוכח שאם הנורמה מושרית ע"י מכפלה פנימית, אזי זהות המקבילית חייבת להתקיים.

נגדיר $f,g\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ע"י ציור f מתחילה ב-1, ויורדת לינארית עד שמגיעה ל0 באמצע הקטע – ומשם נשארת אפס. g מתחילה ב-0, נשארת 0 עד אמצע הקטע ועולה משם לינארית עד 1].
מתקיים $\|f+g\|^2=\|f-g\|^2=\|f\|^2=\|g\|^2=1$ אם נציב בזהות המקבילית נקבל $1+1=2\left(1+1\right)$ וזה לא נכון.

תזכורת (משפט ההצגה של ריס): אם L הינו פונקציונאל רציף על מרחב הילברט H אזי $Ly=\left\langle x,y\right\rangle$ עבור איזשהו $x\in H$.

4. תרגיל(ממבחן תש"ע מועד ב'): נגדיר $M\subset l^2$ להיות תת המרחב שמכיל בדיוק את כל הסדרות $\left\{a_n\right\}\in l^2$ כך ש $a_n=0$ פרט למספר סופי של אינדקסים. אז M הוא מרחב

מכפלה פנימית לא שלם(אין צורך להוכיח). הראו ע"י דוגמה כי משפט ההצגה של ריס נסתר ב M .

פתרון: נגדיר את הפונקציונאל $L\{y_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{n}$, קל לראות כי L לינארי וכן הינו רציף שכן הוא חסום. כעת נניח כי $Ly=\langle x,y\rangle$ עבור $x\in M$ כלשהו. מכיוון ש $x\in M$ נובע כי קיים $N>0$ כך ש $x(k)=0$ עבור $k>N$. ניקח את הסדרה $\{y_n\}=\delta_{N+1}$, אזי ברור כי $L\{y_n\}=\frac{1}{N+1}$ אבל $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}x(i)y(i)=0$ ומכאן סתירה.

5. שני סעיפים ממבחן תשע"ב מועד ב' :
   א. הגדירו את l^p עבור $1\le p\le\infty$ והראו כי $l^p\subset l^\infty$.
   ב. הוכיחו שאם נשרה את נורמת l^∞ על l^1 אז הוא לא מרחב שלם.

פתרון:

א. נדלג על ההגדרה. ברור כי על מנת שהטור $\sum|x|^p$ יתכנס חייב להתקיים כי $\sup x_n<\infty$.

ב. ניקח את הסדרה $x^n=\begin{cases}1/i & 1\le i\le n\\ 0 & otherwise\end{cases}$, קל לראות כי היא קושי ב l^∞ אבל לא מתכנסת לאיבר ב l^1 .

6. ראינו בהרצאה כי המרחב $L^2([0,1],\mathrm{m})$ הינו מרחב מכפלה פנימית ביחס למכפלה הפנימית $\langle f,h\rangle=\int f(x)h(x)dm(x)$. תארו את המרחב האורתוגונלי לוקטור $f(x)=1$.

פתרון: נדרוש כי

$$\langle f,h\rangle=\int f(x)h(x)dm(x)=0\Rightarrow\int 1\cdot h(x)dm(x)=0$$

כלומר אנו דורשים כי האינטגרל על הפונקציה יהיה 0.

7. מצאו קבוצה אורתונורמלית למרחב ההנפרש ע"י הוקטורים $\{1,x,x^2\}$ בקטע $[-1,1]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,h\rangle=\int f(x)h(x)dm(x)$.

פתרון: נבנה את הקבוצה: הווקטור $v_1 = 1$ הינו אותונורמלי כבר ביחס למרחב המכפלה הפנימית שלנו ולכן נשאיר אותו כמו שהוא. קל לראות כי הווקטור השני $v_2 = x$ גם אורתוגונלי ל 1 . את הווקטור השלישי נמצא כך

$$v'_3 = x^2 - \left\langle x^2, 1 \right\rangle 1 - \left\langle x^2, x \right\rangle x = x^2 - \frac{2}{3}$$

שימו לב כי הווקטור החדש הינו אורתוגונלי לווקטורים v_1, v_2 . כעת נשאר לנו לנרמל את הווקטור v_3 . נחשב ונמצא כי

$$\int \left(x^2 - \frac{2}{3} \right)^2 dx = \frac{3}{2}$$

ולכן נקבל כי $v_3 = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$. התהליך שעשינו על מנת לקבל בסיס אורתונורמלי מקבוצה של וקטורים פורשים נקרא תהליך גרם שמידט. הווקטורים אותם מצאנו נקראים וקטורי לז'נדר.