תזכורת: בוחן ביום חמישי הבא.
חומר: עד ג'ורדן כולל. (עד התרגול הקודם.) כולל החומר של ההרצאות.
הבוחן יתנהל בערך כמו בקיץ- יהיה חלק סגור בxi וחלק פתוח. שעה וחצי.
תזכורת: תהי $T : V \to V$ הע"ל. תת מרחב W נקרא T- אינווראינטי אם לכל $w \in W$ $T(w) \in W$.
דוגמא:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$span\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

$$span \{e_2, e_3\}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$$span \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הוא תת מרחב S אינוואריאנטי.
הערה: מרחב עצמי של הע"ל T הוא תמיד תת מרחב אינוואריאנטי, כי כל וקטור בתת מרחב מה שT עושה עליו זה פשוט להכפיל בסקלר אז זה נשאר בתוך התת מרחב.
אבל יכולים להיות גם תתי מרחבים אינוואריאנטים שהם לא מרחבים עצמיים.
למשל, אם לT יש שלושה ע"ע $1, 2, 3$. המ"ע W_1, W_2, W_3 בהתאמה. אז $W_2 + W_3$ הוא לא מרחב עצמי אבל הוא כן תת מרחב T אינוואריאנטי. הסבר: יהי $w = w_2 + w_3 \in W_2 + W_3$

$$T(w) = T(w_2 + w_3) = T(w_2) + T(w_3) = 2w_2 + 3w_3 \in W_2 + W_3$$

מרחב עצמי שמתאים לע"ע λ:

$$N(A - \lambda I)$$

הגדרה: המרחב העצמי המוכלל של A עם הע"ע λ זה:

$$N(A-\lambda I)^n$$

כאשר n שווה לגודל המטריצה A.

מכפלות פנימיות

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R} \vee \mathbb{C}$. מכפלה פנימית (מ"פ) היא פונקציה $V \times V \to \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$
סימון:

$$\langle v,u \rangle$$

שמקיימת 3 תכונות:

1. לינאריות ברכיב הראשון: לכל 3 וקטורים v,u,w ולכל סקלר α, מתקיים:

$$\langle v+\alpha u,w \rangle = \langle v,w \rangle + \alpha \langle u,w \rangle$$

2. הרמיטיות: לכל v,u:

$$\langle u,v \rangle = \overline{\langle v,u \rangle}$$

שימו לב ש $\langle v,v \rangle \in \mathbb{R}$ כי מתכונה 2 נובע שהוא שווה לצמוד של עצמו.

3. חיוביות: $\langle v,v \rangle \geq 0$ ובנוסף $\langle v,v \rangle = 0$ אמ"ם $v=0$.

מסקנות:

1. מעל $\mathbb{R}$ יש סימטריות. כלומר $\langle v,u \rangle = \langle u,v \rangle$
2. סמי לינאריות ברכיב השני:

$$\langle v,u+\alpha w \rangle = \overline{\langle u+\alpha w,v \rangle} = \overline{\langle u,v \rangle + \alpha \langle w,v \rangle} =$$

$$\overline{\langle u,v \rangle} + \bar{\alpha}\overline{\langle w,v \rangle} = \langle v,u \rangle + \bar{\alpha} \langle v,w \rangle$$

כלומר, סכומים ניתן לפרק גם ברכיב השני, וסקלרים מהרכיב השני יוצאים עם צמוד.
מעל הממשיים יש לינאריות מלאה גם ברכיב השני. (גם מעל המרוכבים שימו לב שסקלרים ממשיים יוצאים בצורה רגילה)

3. $\langle \sum \alpha_i v_i, \sum \beta_j u_j \rangle = \sum_i \sum_j \alpha_i \bar{\beta}_j \langle v_i,u_j \rangle$

דוגמאות:

1. המכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^n$:

$$\langle v,u\rangle = v^t u$$

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rangle = \sum x_i y_i$$

למשל:

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 1\cdot 2 + 3\cdot(-4) + 5\cdot 1 = -5$$

2. האם ניתן להגיר את אותה הגדרה מעל $\mathbb{C}$?
לא. למשל כי תכונת החיוביות לא תתקיים.

$$\langle \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = i^2 = -1$$

3. על $\mathbb{C}^n$ יש מכפלה פנימית סטנדרטית אחרת:

$$\langle v,u\rangle = v^t \bar{u}$$

צמוד של וקטור= צמוד על כל רכיב.

$$\langle \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = i\bar{i} = 1$$

4. לכל מ"פ $\langle , \rangle$ על מרחב וקטורי V ולכל סקלר $\alpha > 0$ (בפרט, α ממשי), הפונקציה הבאה גם תהיה מכפלה פנימית:

$$\langle v,u\rangle_N = \alpha\langle v,u\rangle$$

הכפלה בסקלר לא הורסת את הלינאריות ברכיב הראשון. מכיוון שα ממשי גם ההרמיטיות נשמרת. ובגלל ש$\alpha > 0$ החיוביות נשמרת, וכן לא נוספים עוד וקטורים שנשלחים ל0.

.5

$$B = \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) \right\}$$

לכל v, w נגדיר

$$\langle v, w \rangle_N = \langle [v]_B, [w]_B \rangle$$

נבדוק אם אכן מתקבלת מכפלה פנימית:
לינאריות ברכיב הראשון:

$$\langle v + \alpha u, w \rangle_N = \langle [v + \alpha u]_B, [w]_B \rangle = \langle [v]_B + \alpha [u]_B, [w]_B \rangle =$$

$$\langle [v]_B, [w]_B \rangle + \alpha \langle [u]_B, [w]_B \rangle = \langle v, w \rangle_N + \alpha \langle u, w \rangle_N$$

הרמטיות:

$$\langle v, w \rangle_N = \langle [v]_B, [w]_B \rangle = \overline{\langle [w]_B, [v]_B \rangle} = \overline{\langle w, v \rangle_N}$$

חיוביות:

$$\langle v, v \rangle_N = \langle [v]_B, [v]_B \rangle \geq 0$$

וכן

$$\langle v, v \rangle_N = 0$$

רק כאשר

$$\langle [v]_B, [v]_B \rangle = 0$$

שקורה רק כאשר $[v]_B = 0$. וזה קורה רק כאשר $v = 0$.

$$\langle \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) \rangle_N = \langle \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right) \rangle = -1$$

הערה: לכל בסיס B ניתן לבנות בצורה הזאת מכפלה פנימית חדשה.

6. נגדיר מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}^n$:

$$\langle v, u \rangle_N = v^t A u$$

האם זה נותן מכפלה פנימית?
A חייבת להיות הפיכה. אחרת יש וקטור $v \neq 0$ כך ש

$$Av = 0$$

ואז

$$\langle v,v\rangle = v^tAv = 0$$

ולא מתקיים החלק השני של החיוביות.
בשביל שהמכפלה תהיה סימטרית A חייבת להיות סימטרית.

$$\langle v,u\rangle_N = v^tAu$$

$$\langle u,v\rangle_N = u^tAv$$

והם צריכים להיות שווים. תזכרו שv^tAu הוא סקלר. אז הוא שווה לשחלוף שלו. לכן

$$u^tAv = v^tAu = (v^tAu)^t = u^tA^tv$$

בגלל שהשוויון מתקיים לכל u ולכל v, המטריצות שבאמצע חייבות להיות שוות. כלומר

$$A = A^t$$

$$0 < \langle e_i,e_i\rangle_N = e_i^tAe_i = A_{i,i}$$

לכן איברי האלכסון חייבים להיות גדולים מ0 .
הע"ע של A חייבים להיות גדולים מ0, גם. כי אם $v \neq 0$ ו"ע שמתאים לλ אז

$$0 < \langle v,v\rangle = v^tAv = \lambda v^tv$$

v^tv הוא חיובי. לכן λ חייב להיות חיובי.
למעשה, יש משפט שאומר שכל מטריצה סימטרית שכל הערכים העצמיים שלה גדולים ממש מ0 מגדירה מכפלה פנימית בצורה שראינו.

סימון: כאשר V מ"ו עם מכפלה פנימית נתונה, אנחנו אומרים ש $(V,\langle,\rangle)$ הוא מרחב מכפלה פנימית, ממ"פ.
תרגילים:
1. יהי $(V,\langle,\rangle)$ ממ"פ. הוכיחו שלכל $v \in V$

$$\langle 0,v\rangle = 0$$

פתרון: לפי לינאריות ברכיב הראשון

$$\langle 0,v\rangle = \langle 0+0,v\rangle = \langle 0,v\rangle + \langle 0,v\rangle$$

ניתן לצמצם ב$\mathbb{C}$ ונקבל את הדרוש.
2. הוכיחו שאם וקטור v מקיים שלכל $u \in V$

$$\langle v,u\rangle = 0$$

אז $v = 0$.
פתרון: אם זה מתקיים לכל $u \in V$ אז זה מתקיים גם עבור v בעצמו. לכן

$$\langle v, v\rangle = 0$$

גורר ש$v = 0$.
3.הוכיחו שאם וקטור v מקיים שלכל $v \neq u \in V$

$$\langle v, u\rangle = 0$$

אז $v = 0$.
פתרון: אם $v = 0$ סיימנו. אחרת $v \neq 0$ ואז $2v \neq v$ ואז: נכפיל אותו למשל ב$2v$.

$$\langle v, 2v\rangle = 0$$

כלומר

$$2\langle v, v\rangle = 0$$

לכן

$$\langle v, v\rangle = 0$$

הערה: בממ"פ הרבה פעמים בשביל להוכיח שוקטור שווה ל0 מראים שהמכפלה שלו עם עצמו היא 0.
4. יהיו u, v שני וקטורים שמקיימים שלכל $w \in V$

$$\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle$$

הוכיחו ש$u = v$
פתרון:

$$\langle u, w\rangle - \langle v, w\rangle = 0$$

מלינאריות:

$$\langle u - v, w\rangle = 0$$

קיבלנו ש$u - v$ הוא וקטור שהמכפלה שלו עם כל וקטור במרחב היא 0 ולכן מתרגילים קודמים $u - v = 0$. כלומר, $u = v$.
5. תהי $T : V \to V$ הע"ל שמקיימת שלכל v, u

$$\langle T(v), u\rangle = 0$$

הוכיחו/הפריכו: $T = 0$.

פתרון: יהי $v \in V$. נבחר $u = T(v)$. נקבל ש

$$\langle T(v), T(v)\rangle = 0$$

כלומר

$$T(v) = 0$$

זה נכון לכל וקטור במרחב, לכן T היא העתקת ה0.

6. תהי $T : V \to V$ הע"ל שמקיימת לכל $v \in V$:

$$\langle T(v), v\rangle = 0$$

הוכיחו/הפריכו: $T = 0$.

פתרון: נקח $V = \mathbb{R}^2$.

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

אכן T אינה העתקת ה0 , אבל מתקיים:

$$\langle T(v), v\rangle = \langle T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\rangle = \langle \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\rangle = -ba + ab = 0$$

עוד דוגמאות למכפלות פנימיות על מרחבים נוספים:

1. על מרחב המטריצות $\mathbb{C}^{n\times m}$. ניתן להגדיר

$$\langle A, B\rangle = tr(A\overline{B}^t)$$

הערה: מסמנים

$$B^* = \overline{B}^t$$

נוכיח שזאת מכפלה פנימית:

לינאריות ברכיב הראשון:

$$\langle A + \alpha C, B\rangle = tr((A + \alpha C)B^*) = tr(AB^* + \alpha CB^*) = tr(AB^*) + \alpha tr(CB^*) =$$

$$\langle A, B\rangle + \alpha\langle C, B\rangle$$

הרמיטיות:

$$\langle B, A\rangle = tr(BA^*) = tr((BA^*)^t) = tr(\bar{A}B^t)$$

לכן

$$\overline{\langle B, A\rangle} = \overline{tr(\bar{A}B^t)} = tr(AB^*) = \langle A, B\rangle$$

חיוביות:

$$\langle A, A\rangle = tr(A\bar{A}^t) = \sum_{i,j}(A_{i,j})(\overline{A_{i,j}}) = \sum |A_{i,j}|^2 \geq 0$$

ושווה 0 רק אם כל הרכיבים שווים ל0.
זה היה בתרגיל בית בלינארית 1.

$$tr(A\bar{A}^t) = \sum_i (A\bar{A}^t)_{i,i} = \sum_i \sum_j A_{i,j}\bar{A}^t_{j,i} = \sum_i \sum_j A_{i,j}\bar{A}_{i,j}$$

$tamarnachshoni@gmail.com$
תרגיל ממבחן מהקהל:

$$J_3(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(v) = Av$$

$$E = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(v_1)_E = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$T(v_2)_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \end{pmatrix}$$

$$T(v_3)_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ניתן למצוא את

$$T(v_1), T(v_2), T(v_3)$$

במפורש.

כלומר, אפשר למצוא את T במפורש. לפי משפט ההגדרה, ברגע שאמרנו כל וקטור בבסיס לאן הוא הולך- זה כבר מגדיר את ההעתקה.

A תהיה

$$[T]_S$$

$$T(v) = [T(v)]_S = [T]_S[v]_S = [T]_S v$$