# פתרון

1. יהיו $(A,<_A),(B,<_B)$ שתי קבוצות זרות סדורות היטב. נגדיר יחס סדר $<$ על $A\cup B$ באופן הבא:

יהיו $x,y\in A\cup B$. אם $x,y\in A$ אז $x<_A y \iff x<y$. אם $x,y\in B$ אז $x<_B y \iff x<y$. ואם בה"כ $x\in A, y\in B$ אז $x<y$.

הוכיחו שזהו סדר טוב.

פתרון: תהי $C\subseteq A\cup B$. אם $C$ מוכלת ב$A$ אז יש ל$C$ איבר ראשון ב$A$, והוא יהיה גם האיבר הראשון ב$A\cup B$, מהגדרת הסדר על $A\cup B$.

כנ"ל לגבי המקרה ש$C\cup B$.

נניח ש $C\cap A\neq\emptyset$ כן $C\cap B\neq\emptyset$.

$A\supseteq C\cap A\neq\emptyset$ ולכן קיים $a\in C\cap A$ איבר ראשון ביחס לסדר על $A$. נוכיח שהוא איבר ראשון ב$C$ כתת קבוצה של $A\cup B$. ובכן, יהי $c\in C$. אם $c\in A$ אז $a<c$ ב$A$ ולכן ב $A\cup B$. אם $c\in B$ אז $a<c$ מהגרת הסדר על $A\cup B$. לכן $a$איבר ראשון ב$C$. מש"ל.

2. תהי $A$ סדורה היטב. נסמן ב$A^{\mathbb{N}}$ את קבוצת הסדרות האינסופית מעל $A$. נגדיר יחס סדר על $A^{\mathbb{N}}$ באופן הבא: $a_i<b_i \iff (a_1,a_2,...)<(b_1,b_2,...)$ עבור $i=min\{j\in\mathbb{N},a_j\neq b_j\}$.

הוכח/הפרך: זהו סדר טוב.

פתרון: נשים לב לקיומה של הסדרה האינסופית היורדת הבאה: $\{f_i\}$ כאשר $f_i(n)=\begin{cases}1 & n=i\\ 0 & n\neq i\end{cases}$.

3. תהי $A$ קבוצה סדורה, $B\subseteq A$ קופינלית ב$A$, $C\subseteq B$ קופינלית ב$B$. הוכיחו ש$C$ קופינלית ב$A$.

פתרון: יהי $a\in A$. צ"ל שקיים $c\in C$ כך ש $a\leq c$.

$B$ קופינלית ב$A$ ולכן יש $b\in B$ כך ש $a\leq b$. $C$קופינלית ב$B$ ולכן יש $c\in C$ כך ש $b\leq c$. מטרנזיטיביות הסדר, $a\leq c$.

4. הוכח/הפרך: $\mathbb{R}\cong\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. (איזומורפיות סדר)

פתרון: נניח בשלילה שיש $f:\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$. נסתכל על $f[(0,1)]\subseteq\mathbb{R}$. $\Pi>(0,1)$ ולכן $f(\Pi)>f[(0,1)]$. לכן $f[(0,1)]$ היא קבוצה חסומה מלעיל ב$\mathbb{R}$. ידוע מאינפי 1 שלכל קבוצה חסומה מלעיל ב$\mathbb{R}$ יש חסם עליון. כלומר, לקבוצת חסמי ההמלעיל יש מינימום.

מכיוון ש $f:\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ איזומורפיזם סדר, אז $f(a)>f[(0,1)] \iff a>(0,1)$.

כלומר, אם נצמצם את הפו' רק לטווח של $\{a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}:a>(0,1)\}$ נקבל איזו' סדר בין חסמי המלעיל של $(0,1)$ לחסמי המלעיל של $f[(0,1)]$. אבל ב$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ אין מינימום לקבוצת חסמי המלעיל של $(0,1)$. סתירה.

5. הוכח/הפרך: יהיו $A,B$ קבוצות סדורות. אם יש $f:A\to B$ שומרת סדר, ו$g:B\to A$ שומרת סדר, אז $A$ ו$B$ איזומורפיות סדר.

פתרון: הפרכה: נקח: $A=[-1,1]$ ו$B=(1,1)$.

$f : A \to B$ שמוגדרת: $f(x) = x$ היא איזו' סדר. וכן $g : B \to A$ שמוגדרת $g(x) = \dfrac{x}{2}$ היא איזו' סדר. אולם $A$ ו$B$ אינן איזומורפיות סדר, שכן ל$A$ יש איבר מינימום ול$B$ אין.