מועד ב

1. הוכיחו/הפריכו: כל קבוצה בת מניה סדורה קווית צפופה עם איבר ראשון ואחרון איזומורפית סדר ל$\mathbb{Q} \cap [0,1]$
פתרון: הוכחה: $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ היא קבוצה סדורה קווית צפופה בת מניה ללא איבר ראשון ואחרון ולכן איזומורפית ל$\mathbb{Q}$.

כעת תהי L קבוצה בת מניה סדורה קווית צפופה עם איבר ראשון ואחרוןץ אם נוריד את האיבר הראשון והאחרון נקבל קבוצה שאיזומורפית ל$\mathbb{Q}$. הסבר: ב$L \setminus \{\min, \max\}$ אין איבר ראשון ואחרון, כי מהצפיפות לכל $x \neq \min, \max$ קיימים $\min < y < x < z < \max$.

אז $\mathbb{Q} \cap (0,1) \cong L \setminus \{\min, \max\}$. נשלח את האיבר הראשון ל$0$ ואת האחרון ל1 ונקבל איזו סדר.

2. הוכיחו: $cof(\beth_\alpha) = cof(\alpha)$ כאשר α גבולי.
$cof(\beth_\alpha) \leq cof(\alpha)$: תהי $D \subseteq \alpha$ תת קבוצה קופינלית מעוצמת הקופינליות. אזי $\{\beth_\beta\}_{\beta \in D}$ היא תת קבוצה קופינלית של $\beth_\alpha$.

$cof(\alpha) \leq cof(\beth_\alpha)$: תהי D תת קבוצה קופינלית של $\beth_\alpha$ מעוצמת הקופינליות. מכיוון שα גבולי $\beth_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \beth_\beta$. לכן לכל $\gamma \in D$ קיים $\delta_\gamma \in \alpha$ כך ש $\gamma \in \beth_{\delta_\gamma}$. אז $\{\delta_\gamma\}_{\gamma \in D}$ היא תת קבוצה קופינלית של α מעוצמה קטנה או שווה לעוצמת D.

3. הוכיחו שω^ω הוא הסודר המינימלי שמקיים $\omega\alpha = \alpha$
פתרון:

ראשית, $\omega \cdot \omega^\omega = \omega^{1+\omega} = \omega^\omega$

נניח $\alpha < \omega^\omega$. אם $\alpha < \omega$ סיימנו. אחרת, יש n כך ש $\omega^n \leq \alpha < \omega^{n+1}$ ואז

$$\alpha < \omega^{n+1} = \omega\omega^n \leq \omega\alpha$$

4. יהיו $f, g : \omega_1 \to \omega_1$ פונקציות נורמליות. הוכיחו ש

$$A = \{\alpha \in \omega_1 : f(\alpha) = g(\alpha)\}$$

היא סל"ח.
סגורה: תהי $\{\beta_n\}$ סדרה עולה בA, ו$\alpha = \sup \beta_n$. מכיוון ש f וg רציפות מתקיים

$$f(\alpha) = \sup\{f(\beta_n)\} = \sup\{g(\beta_n)\} = g(\alpha)$$

לכן $\alpha \in A$.

לא חסומה: יהי $\alpha_0 \in \omega_1$. נבנה סדרה:

$$\alpha_{2n+1} = f(\alpha_{2n})$$

$$\alpha_{2n+2} = g(\alpha_{2n+1})$$

נשים לב שמתכונות פונקיות נורמליות, הסדרה עולה חלש. אם קיים n זוגי כך ש$f(\alpha_n) = \alpha_n$ ו$g(f(\alpha_n)) = f(\alpha_n)$ אז $\alpha_n \in A$. אם קיים n אי-זוגי כך ש $g(\alpha_n) = \alpha_n$ ו$f(g(\alpha_n)) = g(\alpha_n)$ אז $\alpha_n \in A$. כמו כן, $\alpha_n \geq \alpha_0$ וסיימנו. אחרת, לכלכ איבר בסדרה יש איבר במיקום יותר גבוה שגדול ממנו ממש, ולכן $\beta = \sup\{\alpha_n\}$ היא סודר גבולי. נקבל ש

$$f(\beta) = f\sup\{\alpha_n\} = f\sup\{\alpha_{2n}\} = \sup\{f(\alpha_{2n})\}$$

$$= \sup\{\alpha_{2n+1}\} = \beta$$

באופן דומה:

$$g(\beta) = g\sup\{\alpha_n\} = g\sup\{\alpha_{2n+1}\} = \sup\{g(\alpha_{2n+1})\}$$

$$= \sup\{\alpha_{2n+2}\} = \beta$$

לכן $\beta \in A$ ו$\alpha_0 \leq \beta$.

5. הוכיחו שכל מסנן לא מקסימלי על קבוצה X כלשהי, מוכל בלפחות שני על מסננים שונים.
יהי $\mathcal{F}$ מסנן לא מקסימלי. זה אומר שקיימת $A \subseteq X$ כך ש$A \notin \mathcal{F}$ וגם $A^c \notin \mathcal{F}$. בפרט, לכל $B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \neq \emptyset$. אחרת $B \subseteq A^c$ ומסגירות כלפי מעלה נקבל ש$A^c \in \mathcal{F}$ בסתירה. באותו אופן $A^c \cap B \neq \emptyset$. מכיוון ש$\mathcal{F}$ סגור לחיתוכים סופיים, נקבל ש$\mathcal{F} \cup \{A\}$ ו$\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ שתיהן קבוצות שסגורות לחיתוכים סופיים, אז כל אחת מהן מוכלת בעל מסנן. אבל אלה בהכרח על-מסננים שונים, כי לא ייתכן על מסנן שמכיל גם את A וגם את A^c.

6. בהנחת השערת הרצף המוכללת, מצאו את כל המונים κ שמקיימים

$$\kappa^{\aleph_0} < \kappa^{\aleph_1} < \kappa^{\aleph_2}$$

עבור 1 ידוע ש1^κ לכל κ שווה ל1. לכן 1 לא מקיים זאת.

לכל מונה סופי שונה מ1 ידוע ש$n^\kappa = 2^\kappa = \kappa^+$, כאשר κ מונה אינסופי. כמו כן, $\aleph_n^+ = \aleph_{n+1}$. לכן כל מונה סופי שונה מ1 מקיים זאת.

ניזכר כי לכל n $\aleph_n$ הוא מונה רגולרי, כלומר $cof(\aleph_n) = \aleph_n$. וכן, השערת הרצף המוכללת אומרת שלכל שני מונים אינסופיים :

$$\kappa^{\lambda} = \begin{cases} \lambda^+ & \kappa \leq \lambda \\ \kappa^+ & cof(\kappa) \leq \lambda < \kappa \\ \kappa & \lambda < cof(\kappa) \end{cases}$$

לכן

$$\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1, \aleph_0^{\aleph_1} = \aleph_1$$

כלומר, $\aleph_0$ לא מקיים זאת.

$$\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1, \aleph_1^{\aleph_1} = \aleph_2, \aleph_1^{\aleph_2} = \aleph_3$$

כלומר, $\aleph_1$ מקיים זאת.

$$\aleph_2^{\aleph_0} = \aleph_2^{\aleph_1} = \aleph_2$$

כלומר, $\aleph_2$ לא מקיים זאת.

לכל $\aleph_2 < \kappa$, אם $\aleph_1 < cof(\kappa)$ אז

$$\kappa^{\aleph_0} = \kappa^{\aleph_1} = \kappa$$

ואם $cof(\kappa) \leq \aleph_1$ אז

$$\kappa^{\aleph_1} = \kappa^{\aleph_2} = \kappa^+$$

לכן κ לא מקיים זאת.

לסיכום, המונים שמקיימים זאת הם המונים הסופיים השונים מ1 ו$\aleph_1$.