טורי טיילור ומקלורן

משפט: תהי f פונקציה. נניח שיש ל-f ייצוג כטור חזקות $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ בסביבה כלשהי של 0. אזי המקדמים הם (בהכרח) להיות: $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. בפרט, אם יש ל-$f$ ייצוג כטור חזקות בסביבה של 0 אזי הייצוג הזה יחיד.

הגדרה: טור טיילור של פונקציה ממשית במשתנה אחד $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הגזירה אינסוף פעמים בסביבת הנקודה $x=x_0$ הוא טור חזקות מהצורה

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

מקרה פרטי כאשר $x_0=0$ (נקרא) טור מקלורן.

דוגמה: (מצא) פיתוח טיילור ל-$\ln|1+x|$ עבור $|x|<1$: ידוע כי $\frac{1}{1-x}=\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ עבור $|x|<1$

(נציב $x=-t$ ונקבל: $\frac{1}{1+t}=\sum_{k=0}^{\infty}(-t)^k$

כעת:

$$\ln|1+x|=\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt=\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-t)^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^k t^k\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

דוגמה: (מצא) פיתוח טיילור ל-$\arctan x$

~~ידוע כי עבור $|x|<1$: $\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ (כלומר $|x|<1$) עבור~~

$$\cancel{\frac{1}{1+t^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-t)^{2k}}$$

נציב $x=-t^2$ ונקבל:

$$\frac{1}{1+t^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-t)^{2k}$$

לכן:

$$\arctan(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt=\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-t^2)^k\,dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^k t^{2k}\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

(שים לב כי הטור מתכנס גם עבור $|x|=1$

מכיוון שהטור רציף וגם $\arctan(x)$ מתמשכת

ב $x=1$ נקבל כי:

$$\frac{\pi}{4}=\arctan(1)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}$$

וניתן למצוא את π דרך הטור.

שאלה

<= צריך למצוא: 3 איברים ראשונים בטור טיילור

של $\sin\pi x$ סביב הנק' $a=0.5$

פתרון:

$$\sin\pi x=\sin\pi\left(x-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)=$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\right)=\cos\left(\pi\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{(2n)!}\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^{2n}=1-\frac{\pi^2}{2}\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+\frac{\pi^4}{4!}\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^4-\dots$$

או לחלופין ניתן להשתמש בנגזרות של טור

טיילור של הפונק' $\sin\pi x$ סביב הנק' $a=0.5$

ולקבל:

$$f(x)=\sin\pi x \qquad f^{(1)}(x)=\pi\cos\pi x \qquad f^{(2)}(x)=-\pi^2\sin\pi x$$

$$f^{(3)}(x)=-\pi^3\cos\pi x \qquad f^{(4)}(x)=\pi^4\sin\pi x$$

(נציב במקום $x=0.5$ ונקבל:

$$\sin\pi x=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2!}\cdot(-\pi)^2+\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^4}{4!}\cdot\pi^4+\dots=$$

$$=1-\pi^2\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{2!}+\pi^4\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^4}{4!}+\dots$$

<u>תרגיל:</u> מצאו שלושת האיברים הראשונים בטור מקלורן של $\sin(\sin x)$.

<u>פתרון:</u>

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\sin(\sin x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) - \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)^3}{5!} +$$

$$+ \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)^5 + \dots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{3x^5}{3!\,3!} + \frac{x^5}{5!} =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}$$

<u>תרגיל:</u> המשוואה $e^{-2x} = 3x^2$ בעלת שורש בסביבת $x=0$. מצאו קירוב לשורש בעזרת טור טיילור המתאים ל e^{-2x}.

פתרון.

$$e^{-2x} \approx 1 + (-2x) + \frac{(-2x)^2}{2!} =$$

$$= 1 - 2x + 2x^2 \Rightarrow \quad 1 - 2x + 2x^2 = 3x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \begin{cases} 0.414 \\ -1.41 \end{cases}$$

1

משפט לייבניץ

יהי $\{a_n\}$ סדרה של מספרים חיוביים

השואפת באופן מונוטוני לאפס, כלומר $a_{n+1}<a_n$

לכל n ! $a_n \to 0$, אזי:

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס.
2. סכום S של הטור מקיים $0<S<a_1$
3.

סימון

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

$$S_m(x)=\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n+1}a_n$$

אזי

$$|S(x)-S_m(x)|\leq |a_{m+1}|$$

דיוק של טור לייבניץ א סוכמין הטור

כלומר, השגיאה היא לכל היותר גודל האיבר הבא

בטור

תרגיל (או שאלה) חשבו $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$

(כאשר האם כטור של מספרים

חשבו את האינטגרל עד כדי שגיאה קטנה מ- 0.003 $\cancel{|S(x)-S_m(x)|}$

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}\right)dx=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!\cdot(2n+1)}\Big|_0^1=$$

$$=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)}}_{\text{טור לייבניץ}}$$

רוצים לחשב למה שווה המספר $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$

בקירוב, כלומר נכתב ערך של שגיאה,

ונספק כמה ~~מספרי של טור לסדרת~~

~~ככל~~ איברים ראשונים לסדרה מהטור

כך שערך של השגיאה לא יעלה על הערך שנתנו

במילים אחרות:

$$S = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx}_{\text{לא יודעים מה הערך}} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)}}_{\text{לא ניתן לחשב סכום של אינסוף איברים}} =$$

$$= S_m + \text{השגיאה}$$

צריך לחשב כמה מה איברים הראשונים של הטור

צריך לסדרת כך שערך של השגיאה של S_m

מ S לא יעלה על 0.003

~~לפי~~ משפט שלמדנו טור לייבניץ, נשתמש במשפט לייבניץ

$$|S - S_m| \le |a_{m+1}|$$

נמצא כמה מה איברים הראשונים. די לראות

שעבור $m=1$ וגם ~~...~~ הוא הראשון:

$$|S - S_1| \le |a_2| = \frac{1}{5\cdot 5!} = \frac{1}{120\cdot 5} = \frac{1}{600} \approx 0.002 < \cancel{003}$$
$$< 0.003$$

דוגמא: צריך את $\sin 1$ בדיוק עד כדי שגיאה:

0.000003 :

פתרון: $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$$

נציב כי $x=1$ וגם טור של מספרים

$$\sin 1 = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}_{\text{טור לייבניץ ולכן ניתן להשתמש במשפט לייבניץ}}$$

טור לייבניץ ולכן ניתן ~~...~~ להשתמש במשפט לייבניץ:

$$|\sin 1 - S_m| \le |a_{m+1}|$$

כמו מקודם נמצא כמספר איברים הראשונים

שעבור די לראות כאשר $m=3$ וגם

$$a_4 = \frac{1}{9!} = \frac{1}{362880} < 0.000003$$

(3)

עלינו אם נבחר סכום של 3 איברים ראשונים
של טור טיילור נקבל שהוא שווה לערך של $\sin 1$
עד כדי שגיאה שאינה עולה על 0.000003

<u>דוגמה:</u> חשב את $\log 2$ בעזרת טור חזקות
עד כדי שגיאה שאינה עולה על 0.0022

<u>פתרון:</u> נשתמש בטור חזקות של פונק' $\log \frac{1+x}{1-x}$
(תחום ההתכנסות הינו $(-1,1)$) וכדי לסכום עבור
אילו ערכי x נקבל $\frac{1+x}{1-x}=2$

$$1+x=2-2x \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{3}} \in (-1,1)$$

נמצא טור חזקות של הפונק' הנ"ל:

$$\log(1+x) \Rightarrow (\log(1+x))' = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$\Downarrow$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\log(1-x) \Rightarrow (\log(1-x))' = \frac{-1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\Downarrow$$

$$\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\log \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} =$$

סכום איברי
שני הטורים
כאשר n אי-זוגי
ושווה ל $\frac{2}{n+1}$ כאשר n זוגי

$$= 2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}_{\text{לא טור לייבניץ}}$$

לא טור לייבניץ $\Rightarrow$ לכן (נ)
לא נשתמש במשפט לייבניץ.

$$|\log(2) - S_m| = 2\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1} \le$$

$$\le 2\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 2 \cdot \frac{1}{3^m} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{2}{3^m} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{3^{m-1}}$$

אם נבחר $m=7$ נקבל ש-שגיאה לא עולה
על 0.002.

פונקציה: (רמז- לחשב את ערך של π בדיוק לגבי שגיאה שאינה עולה על 0.02

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}(-1)^n$$

$$\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{3})^{2n+1}} \cdot \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3^n} \cdot \frac{(-1)^n}{2n+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi = \frac{6}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$|\pi - S_n| \leq |a_{n+1}| = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

(נקח $n=2$ ונקבל $|a_{n+1}| \approx 0.0183 < 0.02$

כמו שרצינו.

חישוב של נגזרת מסדר גבוה בעזרת

~~פולינום~~ טור טיילור

<u>דוגמה:</u> נתונה פונק׳ $f(x)=x^2\cos(x^3)$

חשב את $f^{(20)}(0)$, $f^{(25)}(0)$.

<u>פתרון:</u> נשתמש בטורים ידועים:

$$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(x^3)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{6n}}{(2n)!}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=x^2\cos(x^3)=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{6n}}{(2n)!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{6n+2}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$6n+2=20$
$6n=18$
$n=3$

$$\frac{f^{(20)}(0)}{20!}x^{20}=-\frac{x^{20}}{6!}\Rightarrow f^{(20)}(0)=-\frac{20!}{6!}$$

$$\frac{f^{(25)}(0)}{25!}x^{25}=0\cdot x^{25}\Rightarrow f^{(25)}(0)=0$$

<u>דוגמה:</u> חשב את $f^{(6)}(0)$ של פונק׳ $x^4e^{x^2}$.

<u>פתרון:</u>

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\Rightarrow$$

$$f(x)=x^4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+4}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$2n+4=6\Leftrightarrow 2n=2\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n=1$

$$1\cdot x^6=\frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6$$

$$\Downarrow$$

$$f^{(6)}(0)=6!$$

חשב את $f^{(104)}(0)$?

$$104 = 2n+4 \Leftrightarrow 2n = 100 \Leftrightarrow n = 50$$

$$\frac{x^{104}}{(50)!} = \frac{f^{(104)}(0)}{(104)!}x^{104} \Rightarrow f^{(104)}(0) = \frac{(104)!}{(50)!}$$

<u>תרגיל:</u> נחשב את $f^{(10)}(0)$ של

$$f(x) = \int_0^x \cos(3\sqrt{t})\,dt$$

<u>פתרון:</u> לחשב $f^{(10)}(0)$ זה כמו לחשב $(f')^{(9)}(0)$

לכן:

$$f'(x) = \cos(3\sqrt{x})$$

נחשב נגזרת את הטור מסדר 9 של הפונקציה.

נזכר ש:
$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\cos(3\sqrt{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (3\sqrt{x})^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-9)^k x^k}{(2k)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^k$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(-9)^9}{(18)!} = \frac{f^{(9)}(0)}{9!} \Rightarrow f^{(9)}(0) = \frac{9!}{(18)!}\cdot(-9)^9$$

$$\Downarrow$$

$$f^{(10)}(0) = \frac{9!}{(18)!}\cdot(-9)^9 \approx -0.0219586$$