פתרון תרגיל 7 אנליזה הרמונית תשע"ח

תרגיל 1

א. $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$ איננה מכפלה פנימית על המרחב $E[0,1]$, מכיוון שתכונת האי-שליליות לא מתקיימת. הדגמנו זאת בתרגול. למשל, עבור הפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$$

זו פונקציה רציפה למקוטעין וכמובן $f\neq 0$, אך:

$$\langle f,f\rangle=\int_0^1 |f(x)|^2\,dx=0$$

ב. הטענה די הגיונית, בואו נרשום את זה יפה.
תהי $\{x_1,\ldots,x_n\}$ קבוצת הנקודות שבהן $f_1\neq f_2$ ותהי $\{y_1,\ldots,y_m\}$ קבוצת הנקודות שבהן $g_1\neq g_2$.
כעת, לכל $x\notin\{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m\}$ מתקיים: $f_1(x)=f_2(x),\ g_1(x)=g_2(x)$, ולכן גם:

$$af_1(x)+bg_1(x)=af_2(x)+bg_2(x)$$

כלומר, הפונקציות af_1+bg_1, af_2+bg_2 שונות זו מזו לכל היותר ב-$m+n$ נקודות (הנקודות $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m$) ולכן שקולות.
כעת, אפשר לומר שהפונקציות $f_1-f_2,\ g_1-g_2$ שקולה ל-0, ולכן:

$$\begin{aligned}0&=\langle f_1-f_2,g_2\rangle\\0&=\langle f_1-f_2,g_1\rangle\\0&=\langle g_1-g_2,f_1\rangle\end{aligned}$$

וגם $0=\langle g_1-g_2,f_2\rangle$. אם פותחים את כל ארבעת השוויונות לפי הליניאריות של מכפלה פנימית מקבלים את הדרוש.

ג. תהי f רציפה למקוטעין. נסמן ב-$x_1,\ldots,x_n$ את נקודות אי-הרציפות של f.
אנו יודעים שבפונקציה רציפה למקוטעין הגבולות החד צדדיים בכל נקודה קיימים ושווים, ולכן – כדי שתהיה מנורמלת – "נתקן" את הפונקציה באופן הבא. נסמן את הפונקציה המנורמלת $\tilde{f}$.

בכל אחת מהנקודות $x_1,\dots,x_n$ נגדיר:

$$\tilde{f}\left(x_i\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(x_i^+\right)+f\left(x_i^-\right)\right)$$

בקצוות הקטע, נגדיר $\tilde{f}\left(0\right)=f\left(0^+\right),\tilde{f}\left(1\right)=f\left(1^-\right)$.
לכל x אחר נגדיר $\tilde{f}\left(x\right)=f\left(x\right)$.
כעת, $\tilde{f}$ מנורמלת ושקולה ל$-f$, כי היא שונה ממנה בנקודות $x_1,\dots,x_n,0,1$ לכל היותר.

למה $\tilde{f}$ יחידה? נניח שיש עוד פונקציה מנורמלת ששקולה ל$-f$, אסמן אותה ב$-\psi$ (כי אני יכול). נראה שזו אותה פונקציה כמו $\tilde{f}$.

$\tilde{f}$ ו$-\psi$ שקולות זו לזו (כל אחת מהן שונה מ$-f$ במספר סופי של נקודות ולכן הן שונות זו מזו במספר סופי של נקודות. לחלופין, שקילות פונקציות היא יחס שקילות ויחס שקילות הוא טרנזיטיבי).

בכל נקודה $x\in(0,1)$, מתקיים: $\psi\left(x^+\right)=\tilde{f}\left(x^+\right),\ \psi\left(x^-\right)=\tilde{f}\left(x^-\right)$ (כי השוני הוא רק במספר סופי של נקודות ולא יכול לשנות את הגבולות) ולכן:

$$\psi\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(\psi\left(x_i^+\right)+\psi\left(x_i^-\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\tilde{f}\left(x_i^+\right)+\tilde{f}\left(x_i^-\right)\right)=\tilde{f}\left(x\right)$$

המעבר הראשון נכון כי ψ מנורמלת והמעבר השלישי נכון כי $\tilde{f}$ מנורמלת.
בקצוות, מכיוון ששתי הפונקציות $\psi,\tilde{f}$ שקולות ל$-f$ נקבל: $\psi\left(0\right)=f\left(0^+\right)=\tilde{f}\left(0\right),\ \psi\left(1\right)=f\left(1^-\right)=\tilde{f}\left(1\right)$.
סה"כ, לכל $x\in[0,1]$ קיבלנו $\psi\left(x\right)=\tilde{f}\left(x\right)$ וזו אותה הפונקציה.

כעת, אנו יודעים שמרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין הוא מרחב וקטורי, ולכן כדי להראות שאוסף הפונקציות המנורמלות שנסמן ב$-E_N\left[0,1\right]$ הוא מרחב וקטורי, מספיק להראות שהתנאים של הקריטריון המקוצר לתת-מרחב מתקיימים.

1. 0 היא פונקציה מנורמלת (כל פונקציה רציפה היא מנורמלת, חשבו מדוע) ולכן $0\in E_N\left[0,1\right]$.
2. לכל $f,g\in E_N\left[0,1\right]$ ולכל סקלר α יש להראות שגם $\alpha f+g\in E_N\left[0,1\right]$, אך מאריתמטיקה של גבולות נקבל:

$$\left(\alpha f+g\right)\left(x\right)=\alpha f\left(x\right)+g\left(x\right)=\alpha\left(\frac{1}{2}\left(f\left(x^+\right)+f\left(x^-\right)\right)\right)+\frac{1}{2}\left(g\left(x^+\right)+g\left(x^-\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\alpha f\left(x^+\right)+g\left(x^+\right)+\alpha f\left(x^-\right)+g\left(x^-\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\alpha f+g\right)\left(x^+\right)+\left(\alpha f+g\right)\left(x^-\right)\right)$$

והפונקציה $\alpha f+g$ אכן מנורמלת. לכן $E_N\left[0,1\right]$ אכן מרחב וקטורי.

כעת, כדי להראות ש: $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx$ היא אכן מכפלה פנימית על $E_N\left[0,1\right]$, נראה שהתכונות הדרושות ממ"פ מתקיימות.

יתרה מזו, אנחנו יודעים שהליניאריות וההרמיטיות מתקיימות (בגלל האינטגרל בהגדרה של המ"פ, הראנו זאת בתרגול), והתכונה ה"בעייתית" שצריך להוכיח שמתקיימת היא תכונת האי-שליליות.

גם כאן אפשר לדייק; מהגדרת המכפלה אנו רואים שלכל $f\in E_N\left[0,1\right]$ מתקיים: $\langle f,f\rangle\geq 0$ ושאם $f=0$ אז $\langle f,f\rangle=0$, זה גם עובד עם פונקציות רציפות למקוטעין שהן לא מנורמלות.

מה שנשאר להוכיח, ושלא מתקיים בפונקציות רציפות למקוטעין באופן כללי (כפי שהדגמנו בתרגול ובסעיף א'), הוא שאם $\langle f,f\rangle=0$ אז $f=0$. לחלופין, אפשר להראות שאם $f\neq 0$ מנורמלת אז $\langle f,f\rangle>0$.

אם כן, תהי $f\neq 0$ מנורמלת. לכן גם $\left|f^2\right|\geq 0$ מנורמלת (אפשר לראות זאת לפי אריתמטיקה של גבולות, בדומה לתנאי 2 בקריטריון לתת-מרחב שהוכחנו ממש בסעיף זה).

קיים $x_0\in(0,1)$ כך שמתקיים: $f\left(x_0\right)\neq 0$, ולכן $\left|f^2\left(x_0\right)\right|>0$.

מכיוון שהפונקציה מנורמלת, $\left|f^2\left(x_0\right)\right|=\frac{1}{2}\left(\left|f^2\left(x_0^+\right)\right|+\left|f^2\left(x_0^-\right)\right|\right)$, ואפשר לומר שאחד מהגבולות החד צדדיים בנקודה, נניח מימין, גדול ממש מ-0, כלומר $\left|f^2\left(x_0^+\right)\right|>0$.

לכן, מהגדרת הגבול, קיימת סביבה (ימנית) של x_0, $\left(x_0,x_0+\varepsilon\right)$, כך שלכל $x\in\left(x_0,x_0+\varepsilon\right)$ מתקיים: $\left|f^2\left(x\right)\right|>\frac{\left|f^2\left(x_0\right)\right|}{2}$. כעת:

$$\langle f,f\rangle=\int_0^1\left|f^2\left(x\right)\right|dx\geq\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}\left|f^2\left(x\right)\right|dx\geq\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}\frac{\left|f^2\left(x_0\right)\right|}{2}dx=\frac{\left|f^2\left(x_0\right)\right|}{2}\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}dx$$

כלומר, נקבל:

$$\langle f,f\rangle\geq\frac{\left|f^2\left(x_0\right)\right|}{2}\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}dx=\frac{\left|f^2\left(x_0\right)\right|}{2}\varepsilon>0$$

כנדרש. הוכחה זו של האי-שליליות דומה להוכחה שעשינו בכיתה על מרחב הפונקציות הרציפות.

אם כן, על מרחב הפונקציות המנורמלות זו אכן מכפלה פנימית.

לפני השאלות הבאות, נסביר בקצרה מהם טורי פורייה "כלליים".

יהי V מרחב מכפלה פנימית, ונתבונן במערכת אורתונורמלית $\{e_i\}$ במרחב (מכיוון שאנו עוסקים במרחבים וקטוריים עם מימדים אינסופיים, יש הבדל מתמטי בין "בסיס" לבין "מערכת"; זה לא אמור להטריד אותנו).

לכל $v\in V$ אפשר להגדיר את מקדמי פורייה: $\langle v,e_i\rangle$ ובאמצעותם את טור פורייה:

$$\sum\langle v,e_i\rangle e_i$$

למשל, במרחב $E_N\left[-\pi,\pi\right]$ (פונקציות ממשיות) נגדיר מכפלה פנימית:

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)g\left(x\right)dx$$

במרחב זה, הקבוצה: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\sin 3x,\dots\right\}$ היא מערכת אורתונורמלית, ולכן טור פורייה של f הוא:

$$\left\langle f,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle+\sum\left(\langle f,\cos nx\rangle\cos nx+\langle f,\sin nx\rangle\sin nx\right)$$

ולפי הגדרת המכפלה הפנימית זהו בדיוק טור פורייה ה"רגיל", שאנו מכירים.

באופן דומה בקטע $[a,b]$ אפשר להתבונן במערכת אורתונורמלית של סינוסים וקוסינוסים ולקבל את טור פורייה ה"רגיל".

אם נבחר מערכת אורתונורמלית שונה (ובוודאי אם נגדיר מכפלה פנימית שונה), טור פורייה $\sum \langle v, e_i \rangle e_i$ יהיה מן הסתם שונה מהטור ה"רגיל".

יתרה מזו, כשאנו רוצים לחשב קירוב טוב יותר של v, אנו יודעים שהכוונה היא להיטל האורתוגונאלי. ואיך מחשבים היטל אורתוגונאלי על תת-המרחב הנפרש על ידי $\{e_1, \ldots, e_n\}$? באמצעות הנוסחה:

$$\tilde{v} = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle e_i$$

כלומר, ההיטל האורתוגונאלי - הקירוב הטוב ביותר - הוא פשוט סכום חלקי של טור פורייה.

אם כן, בשאלה השנייה המערכת האורתונורמלית היא לא הסינוסים והקוסינוסים אלא פונקציות האר, ולכן הטור נקרא פורייה-האר. בשאלה השלישית המערכת האורתונורמלית היא פולינומי לז'נדר ולכן הטור נקרא פורייה-לז'נדר, ועל זו הדרך.

2. פונקציות האר מוגדרות באופן הבא. הפונקציה הראשונה במערכת היא 1, ולאחר מכן הפונקציות מוגדרות כך:

$$\psi_{n,k} = \begin{cases} \sqrt{2^{n-1}} & \frac{2k-2}{2^n} \le x < \frac{2k-1}{2^n} \\ -\sqrt{2^{n-1}} & \frac{2k-1}{2^n} \le x < \frac{2k}{2^n} \\ 0 & \text{תרחא} \end{cases}$$

כאשר n הוא מספר טבעי ולכל n, $k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$. למשל:

$$\psi_{4,7} = \begin{cases} \sqrt{8} & \frac{12}{16} \le x < \frac{13}{16} \\ -\sqrt{8} & \frac{13}{16} \le x < \frac{14}{16} \\ 0 & \text{תרחא} \end{cases}$$

המערכת $\{\psi_{n,k}\}$ היא מערכת אורתונורמלית. בדקו למשל שמתקיים: $\langle 1, \psi_{4,7} \rangle = 0$ ושמתקיים: $\langle \psi_{4,7}, \psi_{4,7} \rangle = 1$. המכפלה הפנימית היא הסטנדרטית:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

מכיוון שהמערכת מאופיינת על ידי שני אינדקסים (האינדקס $n = 1, 2, \ldots$ והאינדקס k שתלוי ב-n), בטור יהיו שני סכומים, אחד לכל אינדקס.

כעת, נחשב את מקדמי פורייה-האר עבור $f(x) = x$. עבור הפונקציה הראשונה:

$$\langle x, 1 \rangle = \int_0^1 x \cdot 1 dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

ועבור שאר הפונקציות:

$$\langle x, \psi_{n,k} \rangle = \int_0^1 x \cdot \psi_{n,k} dx =$$

הפונקציה $\psi_{n,k}$ מתאפסת ברוב הקטע, ונקבל:

$$= \int_{\frac{2k-2}{2^n}}^{\frac{2k-1}{2^n}} \sqrt{2^{n-1}} x dx - \int_{\frac{2k-1}{2^n}}^{\frac{2k}{2^n}} \sqrt{2^{n-1}} x dx = \sqrt{2^{n-1}} \left(\left. \frac{x^2}{2} \right|_{\frac{2k-2}{2^n}}^{\frac{2k-1}{2^n}} - \left. \frac{x^2}{2} \right|_{\frac{2k-1}{2^n}}^{\frac{2k}{2^n}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^{n-1}} \left(\left(\frac{2k-1}{2^n} \right)^2 - \left(\frac{2k-2}{2^n} \right)^2 - \left(\frac{2k}{2^n} \right)^2 + \left(\frac{2k-1}{2^n} \right)^2 \right)$$

ואם מסדרים, עם קצת רצון וקצת יכולת, מקבלים:

$$\langle x, \psi_{n,k} \rangle = -\sqrt{2^{-3n-1}}$$

אם כן, טור פורייה-האר של x נראה כך:

$$\frac{1}{2} + \sum_n \sum_k \left(-\sqrt{2^{-3n-1}} \right) \psi_{n,k}$$

אפשר להוציא את המינוס החוצה מהסכומים, ולשחק קצת עם המקדם והפונקציה (שניהם חזקות של 2).

כמו שהסברנו, הקירוב האופטימלי – ההיטל האורתוגונאלי של x – מתקבל פשוט כשלוקחים סכום חלקי:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left(-\sqrt{2^{-3n-1}} \right) \psi_{n,k}$$

באופן דומה, אפשר לחשב את מקדמי פורייה-האר של x^2 ואת טור פורייה-האר שלה.
עבור הפונקציה הראשונה:

$$\langle x^2, 1 \rangle = \int_0^1 x^2 \cdot 1 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

ועבור שאר הפונקציות:

$$\langle x^2, \psi_{n,k} \rangle = \int_0^1 x^2 \cdot \psi_{n,k} dx = \int_{\frac{2k-2}{2^n}}^{\frac{2k-1}{2^n}} \sqrt{2^{n-1}} x^2 dx - \int_{\frac{2k-1}{2^n}}^{\frac{2k}{2^n}} \sqrt{2^{n-1}} x^2 dx$$

$$= \sqrt{2^{n-1}} \left(\left. \frac{x^3}{3} \right|_{\frac{2k-2}{2^n}}^{\frac{2k-1}{2^n}} - \left. \frac{x^3}{3} \right|_{\frac{2k-1}{2^n}}^{\frac{2k}{2^n}} \right) = \cdots = -\left(2k-1\right) \sqrt{2^{-(5n-1)}}$$

ולכן, טור פורייה-האר הוא:

$$\frac{1}{3}-\sum_{n}\sum_{k}\left(2k-1\right)\sqrt{2^{-(5n-1)}}\psi_{n,k}$$

והקירוב הטוב ביותר, כמו שהסברנו, הוא פשוט סכום חלקי.

3. בקטע $[-1,1]$, פולינומי לז'נדר שנסמן $P_n\left(x\right)$ הם מערכת אורתוגונאלית (ולא אורתונורמלית!). אפשר להציג את פולינומי לז'נדר בכמה דרכים.
דרך אחת היא נוסחת רודריגז (שם מגניב כמעט כמו עטייא):

$$P_n\left(x\right)=\frac{1}{n!\cdot 2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$$

דרך אחרת, מפורשת:

$$P_n\left(x\right)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\left(-1\right)^k\left(2n-2k\right)!}{k!\left(n-k\right)!\left(n-2k\right)!}x^{n-2k}$$

כאשר $\left[\frac{n}{2}\right]$ הוא הערך השלם התחתון של $\frac{n}{2}$, ויש דרכים נוספות.
פולינומי לז'נדר הראשונים הם:

$$P_0=1,\ P_1=x,\ P_2=\frac{3x^2-1}{2}$$

עם זאת, הפולינומים לא נורמליים, אלא מקיימים: $\langle P_n,P_n\rangle=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$. מכיוון שאנו רוצים מערכת אורתונורמלית, את המקדם $\langle f,P_n\rangle$ נכפיל ב-$n+\frac{1}{2}$. אז למה לא לנרמל את הפולינומים מראש? זהו סיפור אחר ויסופר בפעם אחרת.
שוב, כמו עם פונקציות האר, תבדקו למשל שמתקיים: $\langle P_2,P_1\rangle=0$ וגם $\langle P_1,P_1\rangle=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$. כמו שאמרנו, פולינומי לז'נדר – עם הנרמול של כפל ב-$n+\frac{1}{2}$ – אכן מהווים מערכת אורתונורמלית.
חשוב לשים לב – ואפשר לראות זאת גם בפולינומים הראשונים – לפי ההצגה השנייה של הפולינומים, נקבל שכאשר n זוגי, הפולינום P_n הוא זוגי, וכאשר n אי-זוגי, הפולינום P_n אי-זוגי. מכיוון שהקטע סימטרי, זה יעזור בחישוב.
נתחיל עם הפונקציה $sgn\left(x\right)$. נזכור שמתקיים:

$$sgn\left(x\right)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

u

וגם $sgn\left(0\right)=0$ אבל נקודה אחת לא קריטית בחישוב אינטגרלים.
הפונקציה אי-זוגית, ולכן לכל n זוגי:

$$\langle sgn\left(x\right),P_n\left(x\right)\rangle=\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\int_{-1}^{1}sgn\left(x\right)P_n\left(x\right)dx=0$$

כי הפונקציה בתוך האינטגרל (מה שמכונה האינטגרנד) היא אי-זוגית.
ולכל n אי-זוגי:

$$\langle sgn(x), P_n(x)\rangle = \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\int_{-1}^{1} sgn(x)\, P_n(x)\, dx = \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot 2\int_{0}^{1} sgn(x)\, P_n(x)\, dx$$

בקטע $(0,1)$, $sgn(x)=1$ ולכן:

$$= (2n+1)\int_{0}^{1} P_n(x)\, dx$$

לפי ההצגה השנייה:

$$= (2n+1)\int_{0}^{1}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}x^{n-2k}dx =$$

עם כל הכבוד לזוועה הזו, את כל המקדם אפשר להוציא החוצה, ולעשות אינטגרציה רק ל-x^{n-2k}. נקבל:

$$= (2n+1)\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}\cdot\left.\frac{x^{n-2k+1}}{n-2k+1}\right|_0^1 =$$

כשמציבים $x=0$ הביטוי מתאפס, ולכן נישאר עם:

$$= (2n+1)\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}\cdot\frac{1}{n-2k+1} = (2n+1)\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k+1)!}$$

וזהו המקדם בטור פורייה-לז'נדר. בפתרון של פרופסור שיף מציגים את הפולינומים באמצעות נוסחת רודריגז (הדרך הראשונה), ומקבלים שהמקדמים הם:

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2n+1)(n-1)!}{2^n\left(\frac{n+1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}$$

עבור n אי-זוגי, ועבור n זוגי מקבלים 0 כמו שהסברנו.

עבור $f(x)=|x|$, מכיוון שהפונקציה זוגית, נקבל שעבור n אי-זוגי:

$$\langle |x|, P_n(x)\rangle = \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\int_{-1}^{1}|x|\, P_n(x)\, dx = 0$$

כי הפונקציה בפנים אי-זוגית, ועבור n זוגי:

$$\langle |x|, P_n(x)\rangle = \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\int_{-1}^{1}|x|\, P_n(x)\, dx = \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot 2\int_{0}^{1} xP_n(x)\, dx$$

שוב, נשתמש בהצגה השנייה:

$$(2n+1)\int_0^1 x\cdot\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}x^{n-2k}dx=$$

ומחשבים כמו קודם. בפתרון של פרופסור שיף מציגים את הפולינומים באמצעות נוסחת רודריגז (הדרך הראשונה), ומקבלים שהמקדמים הם:

$$\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}(2n+1)(n-2)!}{2^n\left(\frac{n}{2}+1\right)!\left(\frac{n}{2}-1\right)!}$$

כאשר n זוגי, וכאשר n אי-זוגי מקבלים 0 כמו שהסברנו.

4. נסמן ב$-a_n$ את המקדמים של $sgn\,(x)$ מהשאלה הקודמת, לפי ההצגה הראשונה (כמו של פרופסור שיף). אנחנו רוצים להראות שמתקיים: $a_n=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

אינטואיטיבית, הכוונה היא שכאשר $n\longrightarrow\infty$, המהירות שבה a_n ו$-\frac{1}{\sqrt{n}}$ שואפים לאפס היא זהה (יש שאיפה לאפס כי זה טור פורייה והמקדמים שואפים לאפס אחי) ואפשר לסמן $a_n\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$

במעט יותר דיוק, אנחנו רוצים להסביר למה קיים מספר $0<L<\infty$ כך שמתקיים:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{a_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right|=L$$

ובכן, a_n מערב בתוכו הרבה עצרת ולכן אנחנו רוצים להשתמש בנוסחת סטרלינג, שאומרת: $k!\sim\sqrt{2\pi}k^{k+\frac{1}{2}}e^{-k}$ (איך ה$-e$ וה$-\sqrt{2\pi}$ צצים להם בכל מיני חורים).

אם נסדר זאת מעט, נקבל: $k!\sim\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k$.

לכן:

$$a_n=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2n+1)(n-1)!}{2^n\left(\frac{n+1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\sim\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2n+1)}{2^n}\cdot\frac{\sqrt{2\pi(n-1)}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}{\sqrt{2\pi\left(\frac{n+1}{2}\right)}\left(\frac{n+1}{2e}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot\sqrt{2\pi\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{n-1}{2e}\right)^{\frac{n-1}{2}}}$$

נפלא. בואו נסדר; משהו בחזקת $\frac{1}{2}$ הוא משהו בשורש, ואפשר לסדר:

$$=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2n+1)}{2^n}\cdot\frac{\sqrt{2\pi(n-1)}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}{\sqrt{\pi(n+1)}\left(\frac{n+1}{2e}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot\sqrt{\pi(n-1)}\left(\frac{n-1}{2e}\right)^{\frac{n-1}{2}}}=$$

לאט-לאט. מה קורה עם ה-2 שנמצאים במכנה? יש לנו בסה"כ: $2^{\frac{n+1}{2}}\cdot2^{\frac{n-1}{2}}=2^n$, והם מצטמצמים עם ה$-2^n$ מהשבר השמאלי.

מה קורה עם ה$-e$? במונה יש e^{n-1}, במכנה יש $e^{\frac{n+1}{2}}\cdot e^{\frac{n-1}{2}}=e^n$, מה שמשאיר לנו בסה"כ e.

$\sqrt{\pi(n-1)}$ שבמכנה מצטמצם עם זה שבמונה.

במונה יש $(n-1)^{n-1}$ ובמכנה יש $(n-1)^{\frac{n-1}{2}}$, וזה משאיר אותנו עם $(n-1)^{\frac{n-1}{2}}$ במונה.

לסיכום ביניים, אנחנו נשארים עם:

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} (2n+1) \cdot \frac{\sqrt{2}e\,(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\pi\,(n+1)}\,(n+1)^{\frac{n+1}{2}}} =$$

כעת, $(n+1)^{\frac{n+1}{2}} = (n+1)^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{n+1}$, וכך גם $(n-1)^{\frac{n-1}{2}} = \frac{(n-1)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n-1}}$. נקבל:

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} (2n+1) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}e \cdot \frac{(n-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1) \cdot (n+1)^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{n-1}}$$

כעת, $\frac{2n+1}{n+1} \sim 2$.

כמו כן:

$$\frac{(n-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)^{\frac{n}{2}}} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n} \sim \sqrt{\frac{e^{-1}}{e}} = e$$

המעבר $\sim$ נובע מכך שאנו יודעים (בטח יודעים) שמתקיים: $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \sim e^{-1}$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim e$. נחזור למקדם ונקבל:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} (2n+1) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}e \cdot \frac{(n-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1) \cdot (n+1)^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{n-1}} \sim \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 2e\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{e\sqrt{n-1}}$$

לבסוף, $\sqrt{n-1} \sim \sqrt{n}$, ולכן נקבל:

$$\sim \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

כמו שרצינו.

באופן דומה, אם נסמן ב$-b_n$ את המקדמים בטור פורייה-לז'נדר של $|x|$ שמצאנו בשאלה הקודמת, נמיר את העצרת באמצעות נוסחת סטרלינג ונעבוד קצת, נקבל $b_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

כעת, $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ שואף ל-0 "מהר יותר" מ$-\frac{1}{\sqrt{n}}$.

לפי מה שראינו עכשיו, פירוש הדבר שהמקדמים b_n של $|x|$ שואפים ל-0 מהר יותר מהמקדמים a_n של $sgn\,(x)$. מה עומד מאחורי עובדה זו?

ובכן, אם נבצע אינטגרציה על $sgn\,(x)$ נקבל את $|x|$. כמו שהסברנו בתרגול, מה עושה אינטגרציה למקדמים של הטור? מחלקת אותם ב$-n$; זה נכון בטור פורייה הרגיל וזה נכון גם בטור פורייה-לז'נדר.

כלומר, המקדם של $|x|$ מתנהג כמו המקדם של $sgn\,(x)$ שחילקנו ב$-n$, ובסימונים של התרגיל הזה פירוש הדבר שמתקיים: $b_n \sim \frac{a_n}{n}$.

אכן, ראינו שמתקיים: $b_n \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},\ a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ ואכן $b_n \sim \frac{a_n}{n}$.

לסיכום, כמו שאמרנו בתרגול: אינטגרציה מגדילה את מהירות התכנסות המקדמים ל-0, נגזרת מקטינה אותה.

5. פולינומי צ'בישב מוגדרים כך: $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$. אפשר למצוא נוסחאות מפורשות לפולינום, כמו למשל $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$, אבל הנוסחה הראשונה מספיקה לנו.
ראשית, אנחנו רוצים להראות שהפולינומים אורתוגונאליים. כלומר, אם $m\neq n$ אז $\langle T_n(x),T_m(x)\rangle=0$. לפי הגדרת המכפלה הפנימית במקרה זה, נקבל:

$$\langle T_n(x),T_m(x)\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)\,T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

שוב, אנחנו לא יודעים לטפל ב־ $T_n(x)$ אלא ב־ $T_n(\cos\theta)$. לכן, נציב $x=\cos\theta$.
נקבל $dx=-\sin\theta d\theta$. $\cos\pi=-1$, $\cos 0=1$ והגבולות ישתנו בהתאם:

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)\,T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{\pi}^{0}\frac{T_n(\cos\theta)\,T_m(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\left(-\sin\theta d\theta\right)=$$

כעת, $\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{\sin^2\theta}=\sin\theta$, כי בתחום $0\leq\theta\leq\pi$ הסינוס חיובי. נקבל:

$$=\int_{\pi}^{0}T_n(\cos\theta)\,T_m(\cos\theta)\,(-d\theta)=\int_{0}^{\pi}T_n(\cos\theta)\,T_m(\cos\theta)\,d\theta=$$

הפכנו את הגבולות ולכן הסימן הפך ממינוס לפלוס. לפי ההגדרה של הפולינום, נקבל:

$$=\int_{0}^{\pi}\cos n\theta\cos m\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left(\cos\left((n+m)\theta\right)+\cos\left((n-m)\theta\right)\right)d\theta=$$

לפי זהות טריגונומטרית. מכיוון ש: $n\neq m$, נקבל:

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left((n+m)\theta\right)}{m+n}+\frac{\sin\left((n-m)\theta\right)}{n-m}\right)\Bigg|_0^{\pi}=0$$

כי סינוס מתאפס בכפולות של π. לכן הפולינומים אכן אורתוגונאליים.
כעת, כדי לחשב את המקדמים בטור פורייה-צ'בישב, אנחנו צריכים מערכת אורתונורמלית (ולא סתם אורתוגונאלית), ולכן נחשב את $\langle T_n(x),T_n(x)\rangle$ ונחלק בזה את המקדמים a_n.
אם כן:

$$\langle T_n(x),T_n(x)\rangle=\int_{0}^{\pi}\cos n\theta\cos n\theta d\theta=$$

בדיוק כמו במקרה $n\neq m$ אותו חישבנו. במקרה זה, נקבל:

$$=\int_{0}^{\pi}\cos^2 n\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left(\cos 2n\theta+1\right)d\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2n\theta}{2n}+\theta\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

זה אפשרי רק כאשר $n \neq 0$. שוב, סינוס מתאפס בכפולות של π ובסך הכל:

$$= \frac{\pi}{2}$$

כאשר $n = 0$, נקבל:

$$\langle T_0(x), T_0(x) \rangle = \int_0^{\pi} \cos 0 \cos 0 d\theta = \int_0^{\pi} 1 d\theta = \pi$$

לכן, עבור $n > 0$, המקדמים יהיו:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \langle f, T_n(x) \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x) f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

ועבור $n = 0$, המקדם יהיה:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \langle f, T_0(x) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_0(x) f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

ספציפית את T_0 אפשר למצוא: $T_0(\cos\theta) = \cos 0 = 1$, כלומר $T_0 = 1$, ולכן אפשר לומר:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

6. נקרב את הפונקציה $e^{\frac{x}{2}}$ בקטע $[-1, 1]$ בשלוש דרכים - טור טיילור, טור פורייה-לז'נדר וטור פורייה-צ'בישב.

א.פולינום טיילור מסדר 3 סביב $x = 0$.
סביב $x = 0$, טור טיילור של e^x הוא:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ולכן:

$$e^{\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n! 2^n}$$

ואם נפתח עד סדר 3, נקבל:

$$e^{\frac{x}{2}} \approx \sum_{n=0}^{3} \frac{x^n}{n! 2^n} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{48}$$

ב. קירוב אופטימלי באמצעות ארבעה פולינומי לז'נדר, P_0, P_1, P_2, P_3.
אנו יודעים שהקירוב האופטימלי הוא ההיטל האורתוגונאלי, שהוא הסכום החלקי של טור פורייה-לז'נדר.
בדומה למה שראינו בשאלה 3, מקדמי פורייה-לז'נדר הם:

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int\limits_{-1}^{1} e^{\frac{x}{2}} P_n(x)\, dx$$

ואנו צריכים את המקדמים a_0, a_1, a_2, a_3. הקירוב הוא:

$$e^{\frac{x}{2}} \approx a_0 P_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3$$

פולינומי לז'נדר הראשונים הם:

$$P_0 = 1,\ P_1 = x,\ P_2 = \frac{3x^2 - 1}{2},\ P_3 = \frac{5x^3 - 3x}{2}$$

עם קצת רצון, קצת יכולת וקצת אינטגרציה בחלקים אפשר לחשב את כל אחד מהמקדמים a_0, a_1, a_2, a_3. אם נדייק ב-3 ספרות אחרי הנקודה, נקבל:

$$a_0 \approx 1.042,\ a_1 \approx 0.513,\ a_2 \approx 0.085,\ a_3 \approx 0.008$$

בפתרון של פרופסור שיף הדיוק גבוה יותר. אם אנחנו כבר פה, שימו לב שהמקדמים אכן שואפים ל-0.
אם כן, הקירוב הוא:

$$e^{\frac{x}{2}} \approx 1.042 \cdot 1 + 0.513 \cdot x + 0.085 \cdot \frac{3x^2 - 1}{2} + 0.008 \cdot \frac{5x^3 - 3x}{2}$$

ואם נסדר, נקבל בסך הכל:

$$e^{\frac{x}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x + 0.127x^2 + 0.021x^3$$

שוב, בפתרון של פרופסור שיף הדיוק גבוה יותר ($6 - 5$ ספרות אחרי הנקודה ולא 3).

ג. קירוב אופטימלי באמצעות ארבעה פולינומי צ'בישב, T_0, T_1, T_2, T_3.
גם כאן, הקירוב האופטימלי הוא ההיטל האורתוגונאלי, שהוא הסכום החלקי של טור פורייה-צ'בישב.
המכפלה הפנימית פה היא זו שראינו בשאלה 5, ולא הסטנדרטית. אם כן, מקדמי פורייה-צ'בישב הם:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{1 - x^2}} dx,\ a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{T_n(x)\, e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

כפי שראינו בשאלה 5. אנו צריכים את המקדמים a_0, a_1, a_2, a_3 הקירוב הוא:

$$e^{\frac{x}{2}} \approx a_0 T_0 + a_1 T_1 + a_2 T_2 + a_3 T_3$$

פולינומי צ'בישב הראשונים הם:

$$T_0 = 1,\ T_1 = x,\ T_2 = 2x^2 - 1,\ T_3 = 4x^3 - 3x$$

ושוב, עם קצת רצון, קצת יכולת וקצת אינטגרציה בחלקים אפשר לחשב את כל אחד מהמקדמים a_0, a_1, a_2, a_3. אם נדייק ב־3 ספרות אחרי הנקודה, נקבל:

$$a_0 \approx 1.063,\ a_1 \approx 0.516,\ a_2 \approx 0.064,\ a_3 \approx 0.005$$

בפתרון של פרופסור שיף הדיוק גבוה יותר. שוב, שימו לב שהמקדמים שואפים ל־0.
הקירוב הוא:

$$e^{\frac{x}{2}} \approx 1.063 \cdot 1 + 0.516 \cdot x + 0.064 \cdot \left(2x^2 - 1\right) + 0.005 \cdot \left(4x^3 - 3x\right)$$

ואם נסדר, נקבל:

$$e^{\frac{x}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x + 0.128x^2 + 0.021x^3$$

בדיוק הזה, של 3 ספרות אחרי הנקודה, הקירובים מאד דומים. גם אם מדייקים יותר, אין ביניהם הבדל רב.

עם זאת, אנחנו יודעים שהדיוק של טיילור נפגע כאשר מתרחקים מהנקודה $x = 0$, סביבה פתחנו את הטור.

לכן, בהתסכלות "גלובאלית" בכל הקטע, טיילור פחות מדויק משני האחרים.

בפתרון של פרופסור שיף אפשר לראות בגרפים שהיחס בין הפונקציה לקירוב עם צ'בישב קרוב יותר ל־1 מאשר היחס בין הפונקציה לקירוב עם לז'נדר באיזור קצות הקטע, מה שאומר שבסך הכל הקירוב עם צ'בישב טוב יותר (אך לא בהרבה).