תרגיל 3 טופולוגיה תשע"ו

15 במרץ 2016

1. הוכיחו שהמרחבים הבאים הם שלמים:

   (א) $C[a,b]$ עם הנורמה $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

   (ב) $l_2 = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}$ עם הנורמה $\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$.

2. יהי X מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$.

   (א) הראו שאם X שלם ו־A סגורה אז A תת־מרחב מטרי שלם.

   (ב) הראו שאם A תת־מרחב מטרי שלם אז A קבוצה סגורה.

3. יהי (X,d) מרחב מטרי. נגדיר את **הקוטר** של תת־קבוצה $A \subseteq X$ על ידי:

$$diam(A) = \sup\{d(x,y) | x,y \in A\}$$

הוכיחו שמרחב מטרי הוא שלם אם ורק אם לכל סדרה יורדת של קבוצות סגורות לא ריקות $X \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq \cdots$ המקיימת $diam(F_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ מתקיים $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.
זהו הקריטריון של קנטור לשלמות.

4. האם הקבוצות הבאות פתוחות? סגורות?

   (א) $\mathbb{Q}$ ב־$\mathbb{R}$.

   (ב) מישור ב־$\mathbb{R}^3$.

   (ג) קבוצת המטריצות ההפיכות $GL_n(\mathbb{R})$ במרחב $M_n(\mathbb{R})$ (זהו את המרחב עם המרחב המטרי $\mathbb{R}^{n\times n}$ עם המטריקה האוקלידית).

   (ד) $A = \{(0,1),(0,0)\}$ ב־$\mathbb{R}^2$.

   (ה) $B = \left\{(x,y) | x^2+y^2 < 1\right\} \cup \{(0,1)\}$ ב־$\mathbb{R}^2$.

   (ו) $C = \{(x,y) | x>0, y<0\}$ ב־$\mathbb{R}^2$.

(ז) $A=\{(x,y)\,|y=0,x\in(0,1)\}$ ב$-\mathbb{R}^2$.

(ח) $B=\{(x,y)\,|x=y\}$ ב$-\mathbb{R}^2$.

(ט) $C=\{(x,y)\,|x>0,y<0,x+y>-1\}$ ב$-\mathbb{R}^2$.

5. הוכיחו או הפריכו:

(א) תהיינה d_1,d_2 מטריקות מעל קבוצה X ותהיינה ρ_1,ρ_2 מטריקות מעל קבוצה Y. תהי $f:(X,d_1)\to(Y,\rho_1)$ רציפה. אזי גם $f:(X,d_2)\to(Y,\rho_2)$ רציפה.

(ב) תהי $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ פונקציה בין שני מרחבים מטריים. אזי f רציפה אם ורק אם לכל **כדור פתוח** $O\subseteq Y$, $f^{-1}(O)$ פתוחה ב$-X$.

(ג) תהי $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ פונקציה בין שני מרחבים מטריים. אזי f רציפה אם ורק אם לכל **כדור סגור** $O\subseteq Y$, $f^{-1}(O)$ סגורה ב$-X$.

6. נתבונן במרחב $C[0,1]$, מרחב כל הפונקציות הרציפות $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ עם מטריקת המקסימום.

(א) תהי $a\in[0,1]$. נגדיר פונקציה $F_a:C[0,1]\to\mathbb{R}$ על ידי: $F_a(f)=f(a)$. הוכיחו שזו פונקציה רציפה.

(ב) הוכיחו שהקבוצה $\left\{f\in C[0,1]:f\left(\frac{1}{3}\right)<19\right\}$ פתוחה ב$-C[0,1]$.

7. נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ באופן הבא:

$$f(x,y)=\begin{cases}8 & xy=0\\ \sqrt{2} & xy\neq 0\end{cases}$$

מצאו את קבוצת נקודות הרציפות של f. האם היא פתוחה ב$-\mathbb{R}^2$? סגורה?

8. על $C[0,1]$ נגדיר שתי מטריקות:

$$d_{\max}(f,g)=\max_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$$

$$d_1(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|\,dx$$

מצאו קבוצה פתוחה ב$-(C[0,1],d_{\max})$ שאינה פתוחה ב$-(C[0,1],d_1)$.