ב"א אנליזה 2 תשעו מועד ב

1. חשבו את:

(א) $\int x^2 \ln\left(x^2+x-2\right) \mathrm{d}x$

פתרון: נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\int x^2 \ln\left(x^2+x-2\right) \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{cc} f=\ln\left(x^2+x-2\right) & f'=\frac{2x+1}{x^2+x-2} \\ g'=x^2 & g=\frac{x^3}{3} \end{array} \right\} = \frac{x^3}{3}\ln\left(x^2+x-2\right) - \int \frac{2x+1}{x^2+x-2}\cdot\frac{x^3}{3}\mathrm{d}x$$

ונמשיך לחשב את $\int \frac{(2x+1)x^3}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$ בעזרת שברים חלקיים ואז נחבר הכל לתשובה סופית. נחלק את הפולינמום $(2x+1)\,x^3 = 2x^4+x^3$ בפולינומום x^2+x-2:

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 - x + 5 \\ \hline x^2+x-2 & 2x^4 + x^3 \\ & -\,2x^4 - 2x^3 + 4x^2 \\ \hline & -\,x^3 + 4x^2 \\ & x^3 + x^2 - 2x \\ \hline & 5x^2 - 2x \\ & -\,5x^2 - 5x + 10 \\ \hline & -\,7x + 10 \end{array}$$

וקיבלנו ש $2x^4+x^3 = \left(2x^2-x+5\right)\left(x^2+x-2\right) + (-7x+10)$ ולכן

$$\int \frac{(2x+1)\,x^3}{x^2+x-2}\mathrm{d}x = \int \left(2x^2-x+5\right)\mathrm{d}x + \int \frac{-7x+10}{x^2+x-2}\mathrm{d}x = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5x + \int \frac{-7x+10}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$$

ונמשיך עם חישוב $\int \frac{-7x+10}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$. כיוון ש $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$, קיימים A,B קבועים כך ש

$$\frac{-7x+10}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

נעשה מכנה משותף והשוואת מונים לקבל $-7x+10 = A(x-1) + B(x+2)$. הצבה $x=1$ תתן $3=3B$ ולכן $B=1$. הצבה $x=-2$ תתן $24=-3A$ ולכן $A=-8$. ולכן

$$\int \frac{-7x+10}{x^2+x-2}\mathrm{d}x = \int \frac{-8}{x+2}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x = -8\ln|x+2| + \ln|x-1| + C$$

ובסה"כ נקבל שהתשובה הסופית היא:

$$\begin{aligned}\int x^2\ln\left(x^2+x-2\right)\mathrm{d}x =& \frac{x^3}{3}\ln\left(x^2+x-2\right)-\int\frac{2x+1}{x^2+x-2}\cdot\frac{x^3}{3}\mathrm{d}x\\ =& \frac{x^3}{3}\ln\left(x^2+x-2\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+5x+\int\frac{-7x+10}{x^2+x-2}\mathrm{d}x\right)\\ & \frac{x^3}{3}\ln\left(x^2+x-2\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+5x+\left(-8\ln|x+2|+\ln|x-1|\right)\right)+C\end{aligned}$$

(ב) $\int\frac{\ln^2(x)}{x}\mathrm{d}x$

פתרון: נשתמש בהצבה:

$$\int\frac{\ln^2(x)}{x}\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{c} t=\ln(x)\\ \mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x\end{array}\right\}=\int t^2\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\ln^3(x)}{3}+C$$

.2

(א) מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x)=x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

פתרון: אסימפטוטות אנכיות: הפונקציה לא מוגדרת באפס, נחשב את הגבול

$$\lim_{x\to 0}x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=\{0\cdot\text{חסומה}\}=0$$

ולכן אין אסימפטוטות אנכיות.

אסימפטוטה משופעת מימין: נחשב את הגבול

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right)=\cos(0)=1$$

ו

$$\begin{aligned}n=\lim_{x\to\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}x\cos\left(\frac{1}{x}\right)-x=\lim_{x\to\infty}x\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1\right]=\\ =\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1\right]}{\left(\frac{1}{x}\right)}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=-\sin(0)=0\end{aligned}$$

ולכן $y=x$ אסימפטוטה משופעת מימין.

אסימפטוטה משופעת משמאל: נחשב את הגבול

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right)=\cos(0)=1$$

ו

$$\begin{aligned}n=\lim_{x\to-\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to-\infty}x\cos\left(\frac{1}{x}\right)-x=\lim_{x\to-\infty}x\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1\right]=\\ =\lim_{x\to-\infty}\frac{\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1\right]}{\left(\frac{1}{x}\right)}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=-\sin(0)=0\end{aligned}$$

ולכן $y=x$ אסימפטוטה משופעת משמאל.

(ב) קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^{\infty}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

פתרון: הנקודה הבעייתית היחידה היא ∞ שהרי ב $x=1$ נקבל $\sin(1)$. נראה שהאינטגרל שלנו חבר של האינטגרל $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ שמתכנס ולכן גם מתכנס. לכל $1\le x$ מתקיים כי $0<\frac{1}{x^2}\le 1$ ולכן $\sin(\frac{1}{x^2})>0$ ולכן אפשר להשתמש במבחן הגבול לפונקציות חיוביות:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)'\cos(\frac{1}{x^2})}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\cos(\frac{1}{x^2})=\cos(0)=1$$

וקיבלנו שהאינטגרלים חברים.

.3

(א) חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x}\ln\left(1+\sin^2(t)\right)\mathrm{d}t}{x^3}.$$

פתרון: כיוון ש $\lim_{x\to 0}\int_{-x}^{x}\ln\left(1+\sin^2(t)\right)\mathrm{d}t=0$ (כיוון ש $\ln\left(1+\sin^2(t)\right)$ רציפה והקטע בו עושים אינטגרל שואף ל 0) נוכל בעזרת המשפט היסודי של החדוא לקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x}\ln\left(1+\sin^2(t)\right)\mathrm{d}t}{x^3}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sin^2(x)\right)+\ln\left(1+\sin^2(-x)\right)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln\left(1+\sin^2(x)\right)}{3x^2}$$

ומכיוון ש

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sin^2(x)\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sin^2(x)\right)}{\sin^2(x)}\cdot\frac{\sin^2(x)}{x^2}=1^2\cdot 1^2=1$$

נקבל שהתשובה הסופית היא

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln\left(1+\sin^2(x)\right)}{3x^2}=\frac{2}{3}$$

(ב) חשבו את גבול הסדרה $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)-\ln(n)}{n}$

פתרון: נראה שזהו סכום רימן:

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)-\ln(n)}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

ועבור $f(x)=\ln(1+x)$ שהיא רציפה בקטע $[0,1]$ נקבל ש

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\to\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$$

נחשב את האינטגרל בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$\int\ln(1+x)\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{ccc} f=\ln(1+x) & \Rightarrow & f'=\frac{1}{1+x}\\ g'=1 & & g=x\end{array}\right]=x\ln(1+x)-\int\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x=x\ln(1+x)-\int\frac{x+1-1}{1+x}\mathrm{d}x=$$

$$= x\ln(1+x) - \int 1 - \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = x\ln(1+x) - (x - \ln(1+x)) = (x+1)\ln(1+x) - x + C$$

כאשר בכל מקום השתמשנו ב $\ln(1+x)$ ולא ב $\ln|1+x|$ כי אנחנו מעוניינים בקדומה בקטע $[0,1]$ ושמה $1+x$ חיובי.
לסיכום, נקבל ש

$$a_n \to \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x = [(x+1)\ln(1+x) - x]\Big|_0^1 = 2\ln(2) - 1$$

.4

(א) קרבו את $\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{1{,}000}$.
פתרון: טור טיילור של e^x הוא

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ואם נציב $-x^2$ במקום x, נקבל

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$$

ולכן

$$\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 \left(x^{2n}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

וכעת: כיוון שזהו טור לייבניץ מתקיים שלכל k, יש את החסם

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{2n+1}\right| \le \left|\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{2k+1}\right| = \frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{2k+1}$$

שזהו חסם על השגיאה $\left|\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x - \sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{2n+1}\right|$. כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ $\frac{1}{1000}$ נחפש k עבורו $\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{2k+1} \le \frac{1}{1000}$. עבור $k=5$ נקבל $\frac{1}{120}\cdot\frac{1}{11} < \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{1000}$. מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{5-1} \frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2!\cdot 5} - \frac{1}{3!\cdot 7} + \frac{1}{4!\cdot 9} = \frac{5651}{7560}$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{1000}$כמבוקש.

(ב) חשבו את $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{3^{n+1}}$.
פתרון: נסדר קצת

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 2^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9}\cdot\frac{n\cdot 2^{n-1}}{3^{n-1}} = \frac{2}{9}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

ונחשב $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. זהו הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1}$ שהציבו בו $x = \frac{2}{3}$. כיוון ש $|x| < 1$ במקרה שלנו ניתן לחשב כך:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1\right)' = \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)' = \left((1-x)^{-1} - 1\right)' = (1-x)^{-2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

ולכן

$$\frac{2}{9}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^{2}}=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2}}=2$$

.5

(א) תהיינה פונקציות f,g רציפות כך ש $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ לכל $0\leq x$. הוכיחו כי $f(x)=g(x)$ לכל $0\leq x$.
פתרון: לפי המשפט היסודי של החדוא נקבל שהפונקציות $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ ו $G(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ גזירות (כיוון ש f,g רציפות) ומתקיים $F'(x)=f(x)$ וגם $G'(x)=g(x)$. כיוון שנתון ש $F(x)=G(x)$ נקבל שגם $F'=G'$ וזה מה שרצינו להוכיח.

(ב) תהיינה f רציפה כך ש $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t$ לכל $0\leq x$. הוכיחו כי f פונקציה זוגית.
פתרון: לפי המשפט היסודי של החדוא נקבל שהפונקציות $F_1(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ וגם $F_2(x)=\int_{-x}^0 f(t)$ גזירות (כיוון ש f רציפה) ומתקיים

$$F_1'(x)=f(x),F_2'(x)=f(-x)$$

ומכיוון שנתון ש $F_1(x)=F_2(x)$ נקבל שגם $F_1'=F_2'$, כלומר $f(x)=f(-x)$ לכל $0\leq x$ וזה מוכיח ש f אי זוגית , כפי שרצינו להוכיח.