11. משטחים מינימליים, משפט Egregium,...

11.1 משטחים מינימליים

העתקת Weingarten

$$W_p : T_pM \to T_pM$$

$$W_p(v) = \nabla_v N$$

הגדרה - עקמומיות ממוצעת

עקמומיות ממוצעת של משטח M בנקודה $p \in M$ היא

$$H_p = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(W_p)$$

הערה

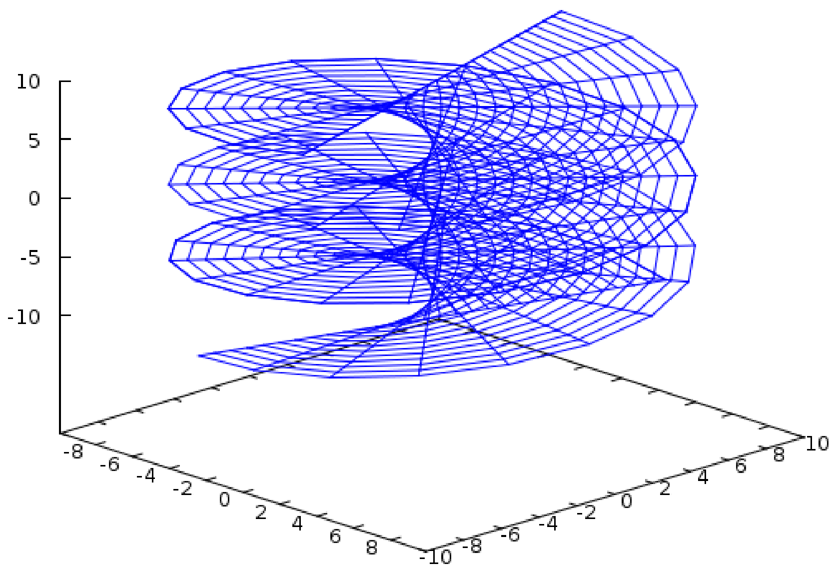
$$H_p = \frac{1}{2}\left(L_1^1 + L_2^2\right) = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$$

בגלל שעקבה היא סכום של ערכים עצמיים.

הגדרה

משטח M נקרא משטח מינימלי אם בכל נקודה $p \in M$ מתקיים $H_p \equiv 0$.
במילים אחרות, $K_1 + K_2 \equiv 0$.

הערה: זה לאו דווקא מישור: לדוגמה הליקואיד הוא משטח מינימלי:



הגדרה

פרמטריזציה $\underline{x}\left(u^1,u^2\right)$ היא <u>איזותרמית</u>($\left(u^1,u^2\right)$ נקראות קואורדינטרות איזותרמיות) אם $g_{ij}=f^2\left(u^1,u^2\right)\delta_{ij}$, $i=1,2$, $j=1,2$,

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix} f^2\left(u^1,u^2\right) & 0 \\ 0 & f^2\left(u^1,u^2\right) \end{pmatrix}$$

$$\|x_1\|=\sqrt{g_{11}}=\sqrt{f^2}=f$$

$$\langle x_1,x_1\rangle=\langle x_2,x_2\rangle$$

ואילו

$$\langle x_1,x_2\rangle=0$$

טענה

נניח ש$\underline{x}\left(u^1,u^2\right)$ היא איזותרמית.
אזי היא מקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית

$$x_{11}+x_{22}=-2f^2H_pn\left(u^1,u^2\right)$$

כאשר H_p היא עקמומיות ממוצעת בנקודה p ו$x_{ij}=\dfrac{\partial^2x}{\partial u^i\partial u^j}$.

הוכחה

קיים יחס

$$L_{ij}=-L_j^mg_{mi}=-L_j^mf^2\delta_{mi}=-f^2L_i^m\delta_{mi}=-f^2L_j^i$$

$$\boxed{L_{ij}=-f^2L_j^i}$$

$$\boxed{L_i^j=-\frac{L_{ij}}{f^2}}$$

$$L_1^1=-\frac{L_{11}}{f^2}\qquad L_2^2=-\frac{L_{22}}{f^2}$$

$$H_p=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(W_p\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{L_{11}}{f^2}-\frac{L_{22}}{f^2}\right)$$

$$\boxed{H_p=\frac{-1}{2f^2}\left(L_{11}+L_{22}\right)}$$

$g_{12}=0$ בכל נקודה, לכן

$$\langle x_1,x_2\rangle=0$$

$$\frac{\partial}{\partial u^1}\langle x_1,x_2\rangle=0$$

לפי כלל ליבניץ נקבל

$$\langle x_{11},x_2\rangle+\langle x_1,x_{12}\rangle=0$$

לכן

$$(*)\qquad\boxed{\langle x_2,x_{12}\rangle=-\langle x_1,x_{22}\rangle}$$

$$\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\langle x_1,x_1\rangle-\langle x_2,x_2\rangle\right)=0$$

$$2\langle x_{11},x_1\rangle-2\langle x_{12},x_2\rangle=0$$

לכן לפי $(*)$

$$2\langle x_{11},x_1\rangle+2\langle x_{22},x_1\rangle=0$$

$$\langle x_{11},x_1\rangle+\langle x_{22},x_1\rangle=0$$

$$\langle x_{11}+x_{22},x_1\rangle=0$$

$$\langle\Delta\underline{x},x_1\rangle=0$$

באותו אופן מוכיחים שגם מתקיים

$$\langle\Delta\underline{x},x_2\rangle=0$$

במידקה ווקטור $\Delta\underline{x}$ מאונך גם לx_1 וגם לx_2, הוא פרופורציונלי לn. (x_1,x_2,n) הוא בסיס ל$\mathbb{R}^3$, לכן $\Delta\underline{x}=Cn$ עם $C\in\mathbb{R}$.

$$C=\langle\Delta\underline{x},n\rangle=\langle x_{11}+x_{22},n\rangle=$$

$$=\left\langle\Delta\Gamma_{11}^k x_k+L_{11}n+\Gamma_{22}^k x_k+L_{22}n,n\right\rangle=$$

$$=\langle L_{11}n+L_{22}n,n\rangle=(L_{11}+L_{22})\langle n,n\rangle=L_{11}+L_{22}$$

לכן

$$C=L_{11}+L_{22}$$

$$\Delta\underline{x}=(L_{11}+L_{22})\,n=\left(-L_1^1-L_2^2\right)f^2n$$

$$\boxed{\underline{x}_{11}+\underline{x}_{22}=-2H_pf^2n}$$

הגדרה

$F(x,n)$ הרמונית אם $\Delta F\equiv 0$.

מסקנה

תהי $\underline{x}\left(u^1,u^2\right)=\left(x\left(u^1,u^2\right),y\left(u^1,u^2\right),z\left(u^1,u^2\right)\right)$ פרמטריזציה <u>איזותרמית</u> של משטח M ב$\mathbb{R}^3$.

אזי M הוא משטח מינימלי <u>אם ורק אם</u> שלושת פונקציות הקואורדינטות x,y,z הן פונקציות הרמוניות.

הוכחה

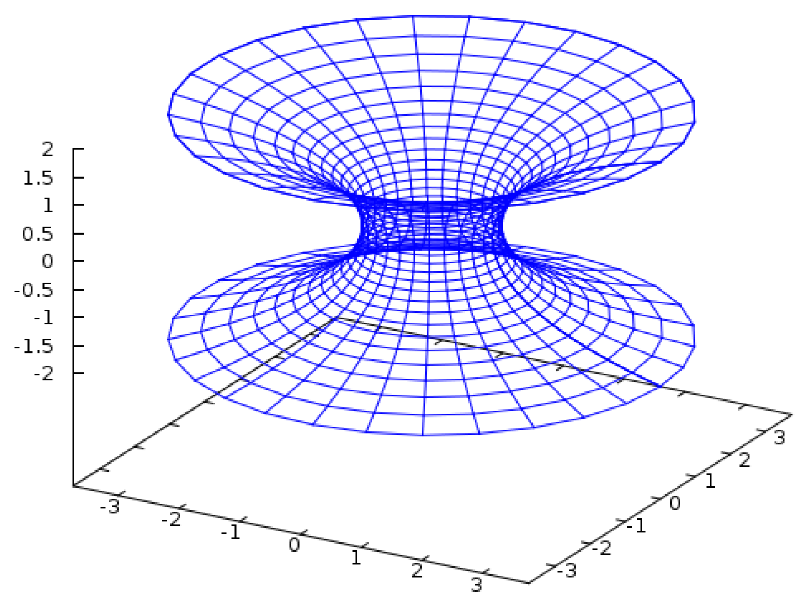
אם M מינימלי אזי $H_p = 0$ ולכן $\Delta \underline{x} = 0$ לכן

$$\Delta x = 0 \qquad \Delta y = 0 \qquad \Delta z = 0$$

דוגמה

Catenoid הוא משטח מינימלי($H_p \equiv 0$)

$$\underline{x}\left(\theta, \varphi\right) = \left(a \cosh \varphi \cos \theta, a \cosh \varphi \sin \theta, a\varphi\right)$$



$$\begin{cases} f\left(\varphi\right) = a \cosh \varphi \\ g\left(\varphi\right) = \varphi \end{cases}$$

$$g_{11} = g_{22} = f^2 \qquad g_{12} = 0$$

$$x_{11} = \left(-a \cosh \varphi \cos \theta, -a \cosh \varphi \sin \theta, 0\right)$$

$$x_{22} = (a\cosh\varphi\cos\theta, a\cosh\varphi\sin\theta, 0)$$

$$x_{11} + x_{22} \equiv 0$$

לכן $H_p \equiv 0$ בכל נקודה.

11.2 הקדמה למשפט Egregium

נידון בגיאומטריה פנימית וגיאומטריה חיצונית.

מטריקה בעקמומיות Gauss קבועה.

11.3 נוסחת Reimann

$$\boxed{\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\sum x^2}\sqrt{\sum \mathrm{d}x^2}}$$

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\sum_i x_i^2}\sqrt{\sum_i \mathrm{d}x_i^2}$$

$$g_{ij} = f^2\delta_{ij}$$

$$\boxed{f = \frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\sum_i x_i^2}}$$

$$k = \alpha$$

11.4 הקדמות למשפט Egregium

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^k x_k + L_{ij} n$$

$$\frac{\partial}{\partial u^j}(n) = n_j = L_j^i x_i$$

$$a_{[ij]} = \frac{1}{2}[a_{ij} - a_{ji}]$$

$$\Gamma^k_{ij;l} := \frac{\partial}{\partial u^l}\left(\Gamma^k_{ij}\right)$$

11.5 זהות בין Γ^k_{ij} ו L_{ij}

טענה

לכל אינדקסים i, j, k, q מתקיימת הזהות

$$\Gamma^q_{i[j;k]} + \Gamma^m_{i[j}\Gamma^q_{k]m} = -L_{i[j}L^q_{k]}$$

הוכחה

לחשבן את מרכיב המשיק של נגזרת שלישית

$$x_{ijk} = \frac{\partial^3 x}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}$$

$$x_{ijk} = (x_{ij})_k = \left(\Gamma^q_{ij}x_q + L_{ij}n\right)_k =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u^k}\left(\Gamma^q_{ij}x_q\right) + \frac{\partial}{\partial u^k}(L_{ij}n) \overset{\text{Leibniz}}{=} \Gamma^2_{ij;k}x_q + \Gamma^q_{ij}x_{qk} + (L_{ij})_k\, n + L_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial u^k}n\right)$$

(תזכורת: $\Gamma^q_{ij;k} = \frac{\partial}{\partial u^k}\Gamma^q_{ij}$)
צריך לפתח את x_{qk}:

$$x_{ijk} = \Gamma^q_{ij;k}x_q + \Gamma^2_{ij}\left(\Gamma^m_{qk}x_m + L_{qk}n\right) + (L_{ij})_k\, n + L_{ij}\left(L^q_k x_q\right) =$$

$$= \Gamma^q_{ij;k}x_q + \Gamma^q_{ij}\Gamma^m_{qk}x_m + \Gamma^q_{ij}L_{qk}n + (L_{ij})_k\, n + L_{ij}L^q_k x_q =$$

$$= \Gamma^s_{ij;k}x_s + \Gamma^q_{ij}\Gamma^s_{qk}x_s + \Gamma^k_{ij}L_{qk}n + (L_{ij})_k\, n + L_{ij}L^s_k x_s$$

$$x_{ijk} = \left(\Gamma^s_{ij;k} + \Gamma^q_{ij}\Gamma^s_{kq} + L_{ij}L^s_k\right)x_s + \left(\Gamma^k_{ij}L_{qk} + (L_{ij})_k\right)n$$

$$0=h_{[jk]}=\left(\underbrace{\Gamma^s_{i[j;k]}+\Gamma^q_{i[j}\Gamma^s_{k]q}+L_{i[j}L^s_{k]}}_{0}\right)x_s+\left(\Gamma^q_{i[j}L_{k]q}+\left(L_{ij}\right)_k\right)n$$

$$h_{jk}-h_{kj}=0$$

לכן לכל $s=1,2$ מתקיים

$$\Gamma^s_{i[j;k]}+\Gamma^k_{i[j}\Gamma^s_{k]q}L_{i[j}L^s_{k]}=0$$

$$\boxed{\Gamma^q_{i[j;k]}+\Gamma^m_{i[j}\Gamma^q_{k]m}=-L_{i[j}L^q_{k]}}$$

11.6 משפט Egregium של Gauss

הגדרה

$$R=\det\left(L^i{}_j\right)=2L^1_{[1}L^2{}_{2]}$$

הוכחנו

$$K=-\frac{2}{g_{11}}L_{1[1}L^2_{2]2}$$

משפט(Egregium)

עקמומיות Gauss $K=K\left(u^1,u^2\right)$ ניתנת לביטוי באמצעות מקדמים של תבנית יסודית ראשונה בלבד(ונגזרותיהם) ע"י

$$K=\frac{2}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{1[1;2]}+\Gamma^j_{1[1}\Gamma^2_{2]j}\right)$$

כאשר מקדמים Γ^k_{ij} מתבטאים באמצעות g_{ij} ע"י

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}\left(g_{il;j}-g_{ij;l}+g_{jl;i}\right)g^{lk}\qquad(*)$$

כאשר $\left(g^{lk}\right)$ היא מטריצה הופכית של $\left(g_{ij}\right)$.

הוכחה

לפי הטענה הקודמת עם $\begin{matrix} i=j=1 \\ k=q=2 \end{matrix}$

$$\Gamma^2_{1[1;2]}+\Gamma^m_{1[1}\Gamma^2_{2]m}=-L_{1[1}L^2_{2]}=g_{1i}L^i_{[1}L^2_{2]}=g_{11}L^1_{[1}L^2_{2]}$$

לכן $(*)=K$.

מתקיים

	$\left(L^i{}_j\right)$	עקמומיות K	עקמומיות ממוצעת H
מישור	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	0	0
גליל	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	0	$\frac{1}{2}$
אינווריאנטיות של עקמומיות.		כן	לא

11.7 נוסחת Palpacian לעקמומיות Gauss

בקואורדינטות $\left(u^1,u^2\right)$ איזותרמיות,

$$g_{ij}=f^2\delta_{ij}=\lambda\delta_{ij}$$

$$\lambda\left(u^1,u^2\right)=f^2\left(u^1,u^2\right)$$

הגדרה

נניח ש־g מטריקה המתבטאת בקואורדינטות איזותרמיות ע"י

$$g_{ij}=\lambda\delta_{ij}$$

אזי אופרטור Laplace-Beltrami שלה הוא

$$\Delta_{LB}=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial^2}{\partial\left(u^1\right)^2}+\frac{\partial^2}{\partial\left(u^2\right)^2}\right)$$

במילים אחרות, $x=u^1$, $y=u^2$,

$$\boxed{\Delta_{LB}\left(F\right)=\frac{1}{\lambda\left(x,y\right)}\left(\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\right)}$$

משפט

עקמומיות K של מטריקה $g_{ij} = \lambda\delta_{ij}$ היא

$$K = -\frac{1}{2}\Delta_{LB}\left(\log\lambda\right)$$

הוכחה

נניח $\lambda = e^{2\mu}$. אזי

Γ^1_{ij}	$j=1$	$j=2$
$i=1$	μ_1	μ_2
$i=2$	μ_2	$-\mu_1$

Γ^2_{ij}	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$-\mu_2$	μ_1
$i=2$	μ_1	μ_2

$$\mu = \frac{1}{2}\log\lambda \qquad \mu_i = \frac{\partial\mu}{\partial u^i}$$

$$\frac{\lambda_1}{2\lambda} = \mu_1$$

הוכחה

$$2\Gamma^2_{1[1;2]} = \Gamma^2_{11;2} - \Gamma^2_{12;1} = \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\Gamma^2_{11}\right) - \frac{\partial}{\partial u^1}\left(\Gamma^2_{12}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial u^2}\left(-\mu_2\right) - \frac{\partial}{\partial u^1}\left(\mu_1\right) = -\mu_{11} - \mu_{22} = -\Delta\mu$$

$$2\Gamma^j_{1[1}\Gamma^2_{2]j} = 2\Gamma^1_{1[1}\Gamma^2_{2]1} + 2\Gamma^2_{1[1}\Gamma^2_{2]2} =$$

$$= \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{21} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} =$$

$$= \mu_1\mu_1 - \mu_2\left(-\mu_2\right) + \left(-\mu_2\right)\mu_2 - \mu_1\mu_1 = 0$$

$$K = \frac{2}{\underbrace{\lambda}_{=g_{11}}}\Gamma^2_{1[1,2]} = \frac{-1}{\lambda}\left(\mu_{11}+\mu_{22}\right) = -\Delta_{LB}\mu = -\frac{1}{2}\Delta_{LB}\left(\log\lambda\right)$$

$$g_{ij} = \lambda\delta_{ij}$$

$$g_{ij} = f^2\delta_{ij}$$

$$\lambda = f^2$$

משפט

למטריקה $g_{ij} = f^2\delta_{ij}$ יש עקמומיות Gauss

$$\boxed{K = -\Delta_{LB} \log f}$$

$$K = -\frac{1}{2}\Delta_{LB}\left(\log \lambda\right) = -\Delta_{LB}\left(\log \sqrt{\lambda}\right) = -\Delta_{LB}\left(\log f\right)$$

דוגמה

מטריקה היפרבולית:

$$g_{ij} = \frac{1}{y^2}\delta_{ij}$$

$$u^1 = x \qquad u^2 = y$$

$$\lambda = \frac{1}{y^2}$$

$$\boxed{f\left(x, y\right) = \frac{1}{y}}$$

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$f = \frac{1}{y} = y^{-1}$$

לכן

$$\log f = -\log y$$

$$K = -\Delta_{LB} \log f = +\Delta_{LB} \log y = \frac{1}{\lambda}\Delta\left(\log y\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\log y\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\log y\right)\right) = y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\log y\right) = y^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$K = y^2 \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \boxed{-1 = K}$$