תרגיל 7 מופשטת 3

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. תהי K/F הרחבה ממימד 2 (של שדות ממאפיין שונה מ 2). חשבו את $\mathrm{Gal}(K/F)$.
רמז: הוכיחו קודם כי $K = F(\sqrt{\alpha})$ עבור $\alpha \in F$ כלשהוא.
פתרון: אז קודם נוכיח ש $K = F(\sqrt{\alpha})$. נבחר $b \in K \backslash F$ כלשהוא. יש לו פולינום מינימלי ממעלה 2

$$x^2 + c_1 x + c_2$$

מתקיים ש

$$b = \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_2}}{2}$$

(כדי לחלק ב 2 צריך שהמאפיין יהיה שונה מ 2). מסמנים

$$\alpha = c_1^2 - 4c_2$$

ואז די ברור ש $K = F(\sqrt{\alpha})$. כידוע K הוא למעשה

$$K = a + b\sqrt{\alpha}$$

שזה שדה הפיצול של $x^2 - \alpha$ מעל F. לכן חבורת גלואה היא תת חבורה של S_2 אז אין הרבה אפציות. ידוע שיש $\varphi \in \mathrm{Gal}(K/F)$ המקיים $\varphi(\sqrt{\alpha}) = -\sqrt{\alpha}$. זה לא האוטומורפיזם הטריוויאלי ולכן בהכרח חבורת גלואה היא S_2

2. יהיו K_1, K_2 שתי הרחבות של F כך שקיים איזומורפיזם $\psi : K_1 \to K_2$ המקיים $\psi(F) = F$. הוכיחו כי

$$\mathrm{Gal}(K_1/F) \cong \mathrm{Gal}(K_2/F)$$

נגדיר פונקציה

$$\phi : \mathrm{Gal}(K_1/F) \to \mathrm{Gal}(K_2/F)$$

לפי

$$\phi(\varphi) = \psi\varphi\psi^{-1}$$

ראשית נשים לב שיש משמעות להגדרה, כלומר $\psi\varphi\psi^{-1} \in \mathrm{Gal}(K_2/F)$. די ברור שזה אוטומורפיזם של K_2 (כי יש כאן הרכבה של איזומורפיזמים) מה שצריך לבדוק זה שהוא מקבע את F. ואכן אם $x \in F$ אז

$$\psi(x) \in F$$

אבל φ מקבע את F ולכן

$$\psi\varphi\psi^{-1}(x) = \psi\psi^{-1}(x) = x$$

כנדרש.

כעת צריך לבדוק שהפונקציה

$$\phi(\varphi) = \psi\varphi\psi^{-1}$$

היא איזומורפיזם של חבורות ואכן

$$\phi(\varphi\varphi') = \psi\varphi\varphi'\psi^{-1} = \psi\varphi\psi^{-1}\psi\varphi'\psi^{-1} = \phi(\varphi)\phi(\varphi')$$

כנדרש.

3. מצאו את:

(א) $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})]$

פתרון: הפולינום המינימילי של $\sqrt[4]{2}$ מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{2}$ הוא $x^2 - \sqrt{2}$. ולכן

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2$$

הפולינום המינימלי של $\sqrt[3]{2}$ מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ הוא $x^3 - 2$(הסבר: אין לפולינום זה שורש ב $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, אילו היה שורש, המימד מעל $\mathbb{Q}$ היה צריך להיות לפחות 3) ולכן

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 3$$

בגלל שהם זרים נקבל שהמימד בסה"כ הוא 6.

(ב) חשבו את חבורת גלואה של ההרחבה הנ"ל.

פתרון: נניח ש φ נמצא בחבורת גלואה. $\varphi(\sqrt[3]{2})$ צריך להיות שורש של $x^3 - 2$ אבל שאר השורשים הם מרוכבים ולכן

$$\varphi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$$

כמו כן

$$\varphi(\sqrt[4]{2}) \in \{\pm\sqrt[4]{2}\}$$

ולכן יש לכל היותר שני איברים בחבורת גלואה. השאלה היא אם יש אוטומורפיזם שמקיים $\varphi(\sqrt[4]{2}) = -\sqrt[4]{2}$? אפשר להוכיח ישירות שזה אוטומורפיזם. אבל נשתמש בטיעון אחר. נשים לב שהשדה $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2})$ הוא שדה הפיצול של $x^2 - \sqrt{2}$ מעל השדה $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2})$. ולכן קיים $\varphi \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}))$ המקיים

$$\varphi(\sqrt[4]{2}) = -\sqrt[4]{2}$$

נשים לב שפונקציה זו נמצאת גם ב

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$$

ולכן יש פונקציה לא קבועה בחבורת גלואה. לכן בחבורת גלואה יש שני איברים והיא איזומורפית ל S_2.

4. יהי $f(x) \in F[x]$ פולינום ספרבילי עם שדה פיצול E. הוכיחו כי $\mathrm{Gal}(E/F)$ פועלת טרנזיטיבית על שורשי $f(x)$ אם ורק אם $f(x)$ הוא אי פריק.

תזכורת: פעולה של חבורה G על קבוצה X היא טרנזיטיבית אם לכל $x, y \in X$ קיים $g \in G$ כך ש $gx = y$. (במילים אחרות, אם קיים רק מסלול אחד)

הערה: את אחד מהכיוונים הוכחנו כבר בכיתה, עבור כיוון זה אתם רק צריכים למצוא את המשפט הרלוונטי ולהשתמש בו.

פתרון: הוכחנו כבר שבהינתן שני שורשים a, b של $f(x)$ יש איזומורפיזם $\varphi; E \to E$ שמקבע את F ומקיים $\varphi(a) = b$. זה בדיוק אומר שחבורת גלואה פועלת טרנזיטיבית על השורשים.

כעת לכיוון ההפוך. נניח בשלילה ש $f(x) = g(x)h(x)$ פריק. בגלל ש $f(x)$ ספרבילי יש שורש של $h(x)$ שהוא לא שורש של $g(x)$. נניח $b \in E$ כך ש $h(b) = 0$ ו $g(b) \neq 0$. ניקח $a \in E$ שורש של $g(x)$ אז לפי הנתון יש

$$\varphi \in \mathrm{Gal}(E/F)$$

כך ש

$$\varphi(a) = b$$

אבל $\varphi(a)$ חייב להיות גם שורש של $g(x)$ בסתירה.