בוחן מבנים אלגבריים הנדסה תשעז

4/1/2016 ו' טבת

מתרגל: אחיה בר־און.

- ענה על 3 מתוך 4 שאלות.
- **על כל דף תשובה רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא.**
- הקפידו על סדר ניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- נמקו היטב את תשובתכם.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- ניקוד: ניקוד שווה של $33\frac{1}{3}$ נקודות לכל שאלה. בכל שאלה הניקוד מתחלק שווה בשווה בין הסעיפים.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

1	
2	
3	
4	
total	

בהצלחה!

.1

(א) תהא G חבורה עם 14 איברים. תהא $H \leq G$ תת חבורה שאינה תת חבורה נורמלית. מה מספר האיברים ב H? נמקו תשובותכם.

פתרון: ממשפט לגרנז' נקבל כי $|H| \in \{1, 2, 7, 14\}$.

אם $|H| = 1$ אז $H = \{e\}$ שהיא תת חבורה נורמלית. סתירה.

אם $|H| = 14$ אז $H = G$ שהיא תת חבורה נורמלית. סתירה.

אם $|H| = 7$ אז $|G/H| = \frac{14}{7} = 2$ ולכן לפי שיעורי בית היא תת חבורה נורמלית. סתירה.

מסקנה: $|H| = 2$

(ב) תהא G חבורה. ותהא $H \leq G$ תת חבורה נורמלית ציקלית כך שחבורת המנה G/H גם כן ציקלית. הוכיחו/הפריכו: G ציקלית.

פתרון: הפרכה: ניקח $G = S_3$ ו $H = \langle(1, 2, 3)\rangle$ אזי H ציקלית לפי הגדרה ובנוסף

$$|G/H| = \frac{|G|}{|H|} = \frac{6}{3} = 2$$

ולכן נורמלית לפי שיעורי בית. בנוסף כיוון ש $|G/H| = 2$ זוהי חבורה עם מספר ראשוני של איברים ולכן ציקלית.

אבל G אינה ציקלית.

.2

(א) תהיינה G_1, G_2 חבורות ויהא $\phi : G_1 \to G_2$ הומומורפיזם. הוכיחו/הפריכו $\ker(\phi)$ הוא תת חבורה נורמלית של G_1.

פתרון: נניח בשלילה כי G ציקלית. כלומר קיים $g \in G$ כך ש $G = \langle g \rangle$. אזי קיים $n \in \mathbb{N}$ טבעי כך ש $g^n = g_1$. נסמן את הסדר של g_1 ב k כלומר $o(g_1) = k$. מתקיים כי

$$g^{nk} = (g^n)^k = g_1^k = e$$

ולכן הסדר של gקטן שווה מ nk. כלומר הסדר של g סופי. אבל G היא אין סופית כי $\langle g_2 \rangle \subseteq G$ וב $\langle g_2 \rangle$ יש אין סוף איברים (כי $o(g_2) = \infty$) בפרט $\langle g \rangle$עם מספר סופי של איברים ולכן אינה יכולה להיות שווה ל G.

(ב) תהא $G = S_n$ ונגדיר לכל $i \in \{1, \ldots, n\}$ את הקבוצה

$$H_i = \{\sigma \in S_n : \sigma(i) = i\}$$

הוכיחו/הפריכו:

i. H_i תת חבורה של G.

פתרון: הוכחה:

כיוון ש G סופית. מ"ל סגירות לפעולה וקיום איבר יחידה.

איבר היחידה - פונקצית הזהות id - נמצאת ב H_i כי $id(i) = i$.

סגירות לפעולה: יהיו $\sigma_1, \sigma_2 \in H_i$ צ"ל כי $\sigma_1\sigma_2 \in H_i$. אכן

$$\sigma_1\sigma_2(i) = \sigma_1(\sigma_2(i)) = \sigma_1(i) = i$$

ii. H_i תת חבורה נורמלית של G.
פתרון: הפרכה:
תהא $id \neq \sigma \in H_i$ (אפשרי אם $n > 2$). אזי קיים j כך ש j $\sigma(j) \neq j$ (בפרט $i \neq j$). נגדיר $\tau = (i, j)$. טענה: $\tau^{-1}\sigma\tau \notin H_i$ (וזה מוכיח כי H_i אינה נורמלית).
הוכחה: נניח בשלילה כי $\tau^{-1}\sigma\tau \in H_i$ אזי

$$\tau^{-1}\sigma\tau(i) = i$$

מצד שני, מחישוב ישיר נקבל כי

$$\tau^{-1}\sigma\tau(i) = \tau^{-1}\sigma(j)$$

נשווה בין שניהם ונקבל $\tau^{-1}\sigma(j) = i$. נפעיל τ על שני צידי המשוואה ונקבל כי $\sigma(j) = \tau(i)$ אבל $\tau(i) = j$. סתירה.

3. תהא G חבורה. נגדיר $Aut(G)$ להיות קבוצת כל ההומומורפיזְם $\phi : G \to G$ ההפיכים (כלומר חח"ע ועל).

(א) הוכח כי $Aut(G)$ חבורה ביחס לפעולת הרכבת פונקציות.
פתרון : הוכחה:
i. יהיו $\phi_1, \phi_2 \in Aut(G)$ אזי לכל $g, h \in G$ מתקיים כי

$$(\phi_1 \circ \phi_2)(gh) = \phi_1(\phi_2(gh)) = \phi_1(\phi_2(g)\phi_2(h)) = \phi_1(\phi_2(g))\,\phi_1(\phi_2(h)) = (\phi_1 \circ \phi_2)(g)\,(\phi_1 \circ \phi_2)(h)$$

ולכן

$$\phi_1 \circ \phi_2$$

הומו'. בנוסף הרכבה של פונקציות הפיכות היא פונקציה הפיכה $\phi_1 \circ \phi_2$ הומו' הפיך ולכן יש סגירות.
ii. קיבוציות יש בכל הרכבת פונקציות
iii. איבר היחידה הוא id שגם הוא הומו'
iv. איבר הופכי : יהי $\phi \in Aut(G)$ אזי נראה כי הפונקציה ההופכית ϕ^{-1} היא גם הומו'. הוכחה

$$\left(\phi^{-1}\right)(gh) = \left(\phi^{-1}\right)(g)\left(\phi^{-1}\right)(h)$$

אמ"מ (ע"י הרכבה של ϕמשני הצדדים)

$$gh = \phi\left[\left(\phi^{-1}\right)(g)\left(\phi^{-1}\right)(h)\right]$$

שאכן מתקיים כי

$$\phi\left[\left(\phi^{-1}\right)(g)\left(\phi^{-1}\right)(h)\right] = \phi\left[\left(\phi^{-1}\right)(g)\right]\phi\left[\left(\phi^{-1}\right)(h)\right] = gh$$

(ב) נגדיר הומומורפיזם של חבורות

$$\Phi : G \to Aut(G)$$

ע"י $\Phi(x) = I_x$ (לכל $x \in G$) כאשר $I_x \in Aut(G)$ מוגדר להיות פונקציה ההצמדה. כלומר $I_x(g) = xgx^{-1}$ (לכל $g \in G$).
הוכיחו כי Φ הומומורפיזם (אין צורך להוכיח כי $I_x \in Aut(G)$) ומצאו $ker(\Phi)$.
פתרון : הוכחה:

i. יהיו $x, y \in G$ אזי צריך להוכיח כי

$$\Phi(xy) = \Phi(x) \circ \Phi(y)$$

כלומר שמתקיים כי הפונקציות

$$I_{xy} = I_x \circ I_y$$

שוות. יהא $g \in G$ צריך להוכיח כי

$$I_{xy}(g) = (I_x \circ I_y)(g)$$

ואכן

ii. נמצא את הגרעין

$$Ker(\Phi) = \{x \in G : \, I_x = id\} = \left\{x \in G : \, \forall g \; xgx^{-1} = g\right\} = \{x \in G : \, \forall g \; xg = gx\} = Z(G)$$

כלומר זה המרכז $(Center)$ של החבורה.

.4

(א) תהא G חבורה ו $N, K \trianglelefteq G$ שתי תתי חבורה נורמליות המקיימות $N \cap K = \{e\}$. הוכיחו כי

$$\forall x \in N, y \in K : \, xy = yx$$

פתרון: יהא $x \in N, y \in K$. מהגדרת N חבורה נורמאלית נקבל כי

$$y^{-1}xy \in N$$

ומסגירות בחבורה נקבל כי גם

$$x^{-1}y^{-1}xy \in N$$

באופן דומה, מנורמליות של K נקבל כי

$$x^{-1}y^{-1}x \in K$$

ועם סגירות

$$x^{-1}y^{-1}xy \in K$$

ולכן

$$x^{-1}y^{-1}xy \in K \cap N = \{e\}$$

ולכן

$$x^{-1}y^{-1}xy = e$$

שזה אומר

$$xy = yx$$

(ב) יהא $\phi : G_1 \to G_2$ הומומורפיזם בין חבורות. נסמן את אברי היחידה e_2 e_1 בהתאמה.

i. הוכיחו: $\phi(e_1) = e_2$

פתרון : מצד אחד $\phi(e_1) = \phi(e_1 e_1)$ ומצד שני

$$\phi(e_1 e_1) = \phi(e_1)\phi(e_1)$$

כיוון ש $\phi(e_2) \in G_2$ יש לו הופכי. לכן אם נכפיל את השיוון

$$\phi(e_1)\phi(e_1) = \phi(e_1)$$

בהופכי זה נקבל

$$\phi(e_1) = e_2$$

ii. הוכיחו: $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$ לכל $g \in G_1$.

פתרון : נחשב

$$e_2 = \phi(e_1) = \phi(gg^{-1}) = \phi(g)\phi(g^{-1})$$

ולכן $\phi(g), \phi(g^{-1})$ הופכיים זה לזה.