השלמה להרצאת 4.1

טענה: לכל $\alpha \neq \beta$, $K_\alpha \cap K_\beta = \{\vec{0}\}$.

ה. יהי $v \in K_\alpha \cap K_\beta$. יהי l המס' הטבעי הקטן ביותר כך ש $(T-\beta I)^l v = \vec{0}$. (יש, כי $v \in K_\beta$).

אז $u := (T-\beta I)^{l-1} v \neq \vec{0} \in V_\beta$ (אכן, $(T-\beta I)u = (T-\beta I)^l v = \vec{0}$, לכן $Tu = \beta u$.)

$v \in K_\alpha$, ו- K_α אינווריאנטי תחת T ולכן תחת כל פולינום ב- T.

לכן $u = (T-\beta I)^{l-1} v \in K_\alpha$, ולכן

$$\vec{0} \overset{u \in K_\alpha}{=} (T-\alpha I)^n u = (T-\alpha I)^{n-1}(T-\alpha I)u \underset{Tu=\beta u \Leftarrow u \in V_\beta}{=} (T-\alpha I)^{n-1}(\beta u - \alpha u) = \cancel{(T-\alpha I)^{n-1}(\beta-\alpha)u} =$$

$$= (\beta-\alpha)(T-\alpha I)^{n-1} u \underset{\text{באינדוקציה}}{=} (\beta-\alpha)\cdot(\beta-\alpha)^{n-1} u = \underbrace{(\beta-\alpha)^n}_{\neq 0} \underbrace{u}_{\neq \vec{0}} \neq \vec{0}. \ ↯$$

הערה: אם $u \in V_\lambda(T)$, אז לכל $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, $p(T)\cdot u = p(\lambda)\cdot u$:

נכתוב $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + .. + \alpha_m x^m$. אז

$$p(T)u = (\alpha_0 I + \alpha_1 T + .. + \alpha_m T^m)u = \alpha_0 u + \alpha_1 Tu + .. + \alpha_m T^m u =$$

$$= \alpha_0 u + \alpha_1 \lambda u + .. + \alpha_m \lambda^m u = (\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + .. + \alpha_m \lambda^m) u = p(\lambda) u \quad //$$

בפרט, עבור $p(x) = (x-\alpha)^n$ נקבל: $(T-\alpha I)^n u = p(T)u = p(\beta)u = (\beta-\alpha)^n u$

כלומר הדיון בהוכחת הטענה הוא מקרה פרטי של זה.